Éléments d’analyse mathématique des fluides incompressibles

Charlotte Perrin

18 mars 2024

Chapitre 1

Introduction aux équations de la mécanique des fluides

références : Boyer, Fabrie *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*

1.1 Échelles de description

Pour rappel, on distingue usuellement trois échelles de description pour un système de particules en interaction :

— échelle microscopique → modèles de "dynamique moléculaire" ;

— échelle mésoscopique → modèles cinétiques ;

— macroscopique : mécanique des milieux continus

On s'intéresse dans ce cours à cette dernière échelle. Grosso modo, cette description macroscopique est valide quand les longueurs caractéristiques du problème sont grandes par rapport au libre parcours moyen des particules/molécules. Dans ce cas, le mouvement des particules peut être considéré d'un point de vue moyenné, c'est-à-dire qu'on va décrire l'état / la dynamique d'un volume élémentaire de fluide au travers des variables macroscopiques de : densité (masse contenue dans le volumne élémentaire), notée dans la suite $\rho \geq 0$, et vitesse macroscopique (vitesse moyenne des particules dans ce volume élémentaire), notée dans la suite v (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, d étant la dimension d'espace).

Remarque : Au-delà de la vitesse v, et de la densité ρ, l'écoulement d'un fluide peut être décrit par d'autres variables : entropie, température, salinité, etc. Cependant, nous nous limiterons dans ce cours aux variables de vitesse et densité.

1.2 Points de vue Eulérien et Lagrangien

On distingue usuellement deux points de vue pour décrire l'écoulement d'un fluide.

Point de vue Lagrangien Le point de vue Lagrangien consiste lui à suivre les "particules de fluides" au cours du temps. Dans ce cadre, on introduit $X(t; t_0, a)$ la position à l'instant t de la particule qui était en a à l'instant t_0. L'application $t \mapsto X(t;t_0,a)$ est appelée trajectoire de la particule de fluide (aussi appelée caractéristique).

Vitesse et trajectoires sont liées par l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X(t;t_0,a)}{\partial t} = v\big(t, X(t;t_0,a)\big), \\ X(t_0;t_0,a) = a. \end{cases} \tag{1.1}$$

Point de vue Eulérien C'est en général selon ce point de vue qu'on exprime les équations de la dynamique. On se place dans la position d'un observateur situé à l'instant t à la position $x \in \mathbb{R}^d$ (d est la dimension d'espace). La bonne notion de dérivée en temps pour la quantité $f(t,x) = f(t, X(t;t_0,a))$ est donnée par la dérivée matérielle :

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla) f. \tag{1.2}$$

Rappel : on a pour une fonction f (à valeurs scalaires ou vectorielles)

$$(v \cdot \nabla) f = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f$$

Dit autrement, regarder la dérivée matérielle consiste à étudier les variations en temps le long des trajectoires du fluide.

Théorème de transport Soit Ω_0, le volume occupé par le fluide à l'instant 0, on définit le flot φ_t tel que l'ensemble $\Omega_t = \varphi_t(\Omega_0)$ contient les mêmes particules de fluides qu'à l'instant 0. Notons qu'on a $X(t;t_0,a) = \varphi_t\big(\varphi_{t_0}^{-1}(a)\big)$.

On introduit l'opérateur de divergence, défini de manière générale comme la trace de la matrice Jacobienne.

— La divergence d'un champ $g = (g_1, \dots, g_d) \in \mathbb{R}^d$ est ainsi donnée par :

$$\operatorname{div}(g) := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}. \tag{1.3}$$

— On appelle divergence du tenseur $G = (G_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, le vecteur :

$$\operatorname{div}(G) := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial G_{i,j}}{\partial x_j}. \tag{1.4}$$

On introduit également le Jacobien du flot : $J(t,\cdot) := \det D\varphi(t,\cdot)$

Proposition 1.1. *On a*

$$\frac{d}{dt} J(t,a) = \big(\operatorname{div} v\big)(t, \varphi_t(a)).J(t,a). \tag{1.5}$$

Démonstration. En utilisant l'équation caractéristique (1.1) et la formule de la différentielle d'une fonction composée, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} D\varphi_t(a) = Dv(t, \varphi_t(a)).D\varphi_t(a), \qquad \forall a \in \Omega_0, \\ D\varphi_0 = \mathrm{Id}. \end{cases}$$

D'autre part, on rappelle que :

$$\det(A+H) \underset{H\to 0}{=} \det(A) + (\det A)\mathrm{Tr}(HA^{-1}) + o(H),$$

de sorte que, en utilisant une nouvelle fois la formule de différentiation d'une fonction composée :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t,a) &= \mathrm{Tr}\Big(Dv(t,\varphi_t(a)).D\varphi_t(a)(D\varphi_t(a))^{-1}\Big).J(t,a)\\ &= \big(\mathrm{div}\, v\big)(t,\varphi_t(a)).J(t,a).\end{aligned}$$

□

Théorème 1.2 (Théorème de transport)**.** — *Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ on a :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(t,x)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(fv)\right)(t,x)\,dx, \tag{1.6}$$

— *Pour toute fonction $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ on a :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F(t,x)dx = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathrm{div}\,(F\otimes v)\right)(t,x)\,dx, \tag{1.7}$$

où le produit tensoriel $\otimes$ est donné par : $(F\otimes v)_{i,j} := F_i v_j$ pour tous $i, j \in \{1,\dots,d\}$.

Démonstration. On a tout d'abord par le changement de variable $x = \varphi_t(a)$:

$$\int_{\Omega_t} f(t,x)dx = \int_{\Omega_0} f(t,\varphi_t(a))|J(t,a)|da,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(t,x)dx &= \int_{\Omega_0}\frac{d}{dt}\big(f(t,\varphi_t(a))\big)|J(t,a)|da + \int_{\Omega_0} f(t,\varphi_t(a))\frac{d}{dt}|J(t,a)|da\\ &= \int_{\Omega_0}\Big(\partial_t f(t,\varphi_t(a)) + (v(t,\varphi_t(a))\cdot\nabla)f(t,\varphi_t(a))\Big)|J(t,a)|da\\ &\quad + \int_{\Omega_0} f(t,\varphi_t(a))\frac{J(t,a)}{|J(t,a)|}\frac{d}{dt}J(t,a)da\\ &= \int_{\Omega_0}\Big(\partial_t f(t,\varphi_t(a)) + (v(t,\varphi_t(a))\cdot\nabla)f(t,\varphi_t(a))\\ &\qquad + f(t,\varphi_t(a))\big(\mathrm{div}\, v\big)(t,\varphi_t(a))\Big)|J(t,a)|da.\end{aligned}$$

Par changement de variable inverse, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} f(t,x)dx &= \int_{\Omega_t}\Big(\partial_t f(t,x) + (v(t,x)\cdot\nabla)f(t,x) + f(t,x)\big(\mathrm{div}\, v\big)(t,x)\Big)dx\\ &= \int_{\Omega_t}\Big(\partial_t f(t,x) + \mathrm{div}\,(fv)(t,x)\Big)dx.\end{aligned}$$

dans le cas où f est à valeurs scalaires.

Dans le cas où f est à valeurs vectorielles on utilise l'identité suivante :

$$\mathrm{div}\,(u\otimes v) = (\mathrm{div}\, v)u + (v\cdot\nabla)u, \tag{1.8}$$

pour tous champs vectoriels u, v. □

1.3 Équations d'évolution, principes de conservation et lois de comportement

1.3.1 Équations bilans

Principe de conservation de la masse En supposant qu'il y a conservation globale de la matière dans le système, on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(t,x)dx = 0,$$

et ainsi par le théorème de transport 1.2 :

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v)\right)(t,x)\, dx = 0, \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Ceci étant vérifié pour tout élément Ω_t, on a l'équation locale de conservation de la masse (aussi appelée équation de continuité) :

$$\boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0} \tag{1.9}$$

Bilan de quantité de mouvement On définit la quantité de mouvement totale dans l'élément de fluide Ω_t :

$$\int_{\Omega_t} \rho(t,x) v(t,x)\, dx.$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique (2e loi de Newton) stipule que la variation en temps de cette quantité de mouvement totale est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de fluide, c'est-à-dire la somme

— des forces volumiques, en notant f les (/la densité des) forces extérieures s'appliquant sur l'élément de fluide (*e.g.* la force gravité)

$$\int_{\Omega_t} \rho f dx;$$

— et des forces surfaciques qui rendent comptent des forces exercées par les autres éléments fluide de l'écoulement sur Ω_t :

$$\int_{\partial\Omega_t} \sigma(t,y).n dy, \qquad n = \text{normale unit. sortante à la surface } \partial\Omega_t,$$

σ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy (Cauchy stress tensor).

Par le théorème de transport et le théorème de divergence on a donc :

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v)\right] dx = \int_{\Omega_t} \rho f\, dx + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\sigma)\, dx.$$

L'équation (locale) de la quantité de mouvement s'écrit

$$\boxed{\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \operatorname{div}(\sigma) = \rho f} \tag{1.10}$$

1.3.2 Lois de comportement et lois d'état

Il reste à "fermer" le système formé par les deux équations bilans (1.9)-(1.10), en précisant la dépendance de σ vis-à-vis de nos deux inconnues ρ et v.

Décomposition du tenseur des contraintes Tout d'abord, commençons par une propriété fondamentale du tenseur des contraintes :

Proposition 1.3 (Thm I.3.4 Boyer & Fabrie)**.** *Supposons que, ρ, v et f sont régulières, alors le tenseur des contraintes σ est symétrique.*

On décompose alors le tenseur σ de la façon suivante :

$$\boxed{\sigma = -p\mathrm{Id} + \mathbb{S}} \tag{1.11}$$

où

- la composante $-p\mathrm{Id}$ représente les contraintes subies quand le fluide est au repos, *i.e.* quand $v = 0$. On appelle $p = p(t,x) \in \mathbb{R}$ la pression du fluide ;
- la composante $\mathbb{S} \in M_{d,sym}(\mathbb{R})$ est appelée tenseur des contraintes visqueuses.

Loi d'état - Fluide barotrope On dit qu'un fluide est barotrope quand la pression est une fonction de la seule densité :

$$p = P(\rho). \tag{1.12}$$

Se donner une fonction P (via la thermodynamique), c'est se munir d'une loi d'état. On peut prendre par exemple, la loi des gaz isentropiques : $P(\rho) = a\rho^\gamma$, avec $a > 0$, $\gamma > 1$.

Loi constitutive / de comportement du fluide - Hypothèse de fluide Newtonien Se donner un loi de comportement, c'est expliciter comment $\mathbb{S}$ est relié à la vitesse u et éventuellement aux autres variables de densité, pression, température, etc.
On dit que le fluide est Newtonien si le tenseur des contraintes visqueuses $\mathbb{S}$ dépend linéairement de $\mathbb{D}(v)$, $\mathbb{D}(v)$ étant défini comme la partie symétrique du gradient :

$$\mathbb{D}(v) := \frac{\nabla v + (\nabla v)^t}{2},$$

aussi appelé tenseur des taux de cisaillement (shear rate tensor).

Sous l'hypothèse d'un fluide newtonien, on écrit le tenseur des contraintes visqueuses sous la forme :

$$\boxed{\mathbb{S} = 2\mu\mathbb{D}(v) + \lambda \operatorname{div} v \,\mathrm{Id}} \tag{1.13}$$

Les deux coefficients μ et λ sont deux coefficents réels (qui pourraient, en toute généralité, aussi dépendre de ρ, p, ou de la température) :

- $\mu \geq 0$ est appelée viscosité de cisaillement (shear viscosity) ;
- $\lambda + \frac{2}{d}\mu \geq 0$ (ou parfois juste λ) est appelée viscosité de volume (bulk viscosity).

Exercice : vérifier les formules suivantes pour un champ $v \in \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{Tr}(\mathbb{D}(v)) = \mathrm{Tr}(\nabla v) = \operatorname{div} v, \tag{1.14}$$
$$\operatorname{div}((\nabla v)^t) = \nabla(\operatorname{div} v), \tag{1.15}$$
$$\operatorname{div}(2\mathbb{D}(v)) = \Delta v + \nabla(\operatorname{div} v), \tag{1.16}$$
$$\operatorname{div}\big((\operatorname{div} v)\mathrm{Id}\big) = \nabla(\operatorname{div} v), \tag{1.17}$$

où on définit le Laplacien par $\Delta v := \operatorname{div}(\nabla v)$.

1.3.3 Conclusion - Système d'équations

On a obtenu le système d'équations suivantes sur les inconnues (ρ, v) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \mathrm{div}\,(\rho v \otimes v) + \nabla P(\rho) - \mu\Delta v - \nabla\big((\lambda+\mu)\mathrm{div}\, v\big) = \rho f, \end{cases} \qquad \forall\ t>0,\ \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.18}$$

appelé

— système de Navier-Stokes compressible quand $\mu > 0$, $\lambda + \dfrac{2}{d}\mu \geq 0$;

— système d'Euler compressible quand $\mu = \lambda = 0$ (fluide non-visqueux).

On complète finalement le système avec une condition initiale $(\rho^0, (\rho v)^0)$ et des conditions au bord du domaine Ω.

Remarque : d'un point de vue mathématique, les équations d'Euler expriment des phénomènes de transport et se rattachent donc à la classe des systèmes hyperboliques, tandis que le système de Navier-Stokes couple des phénomènes de transport et de diffusion (liée à la présence de viscosité).

1.4 Équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles

Proposition 1.4 (Définition régime incompressible)**.** *Un écoulement est dit incompressible si l'une de ces propriétés suivantes équivalentes est satisfaite :*

1. *le volume de n'importe quel élément de fluide est constant au cours du temps ;*
2. *le champ de vitesse v est à divergence nulle :* $\mathrm{div}\, v = 0$ *;*
3. *la densité est constante le long des trajectoires.*

Idée de la preuve. — $1 \Longleftrightarrow 2$: on applique le théorème de transport

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} 1\, dx = \int_{\Omega_t} \mathrm{div}\, v\ dx;$$

— $2 \Longleftrightarrow 3$ on écrit le bilan de masse sous la forme $\dfrac{D\rho}{Dt} = -\rho \mathrm{div}\, v$.

□

Dans le régime incompressible, si la densité initiale à $t = 0$ est constante, $\rho^0(x) \equiv \rho_0 > 0$ alors, comme ρ est constant le long des caractérisitques, on en déduit que $\rho(t,x) \equiv \rho_0$ pour tous t, x. Le fluide est alors dit homogène.

Équations de Navier-Stokes incompressible homogène

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, v = 0, \\ \partial_t v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - \nu\Delta v = f, \end{cases} \tag{1.19}$$

où $\nu > 0$ est appelée viscosité cinématique, et la "pression" p (qui n'est plus une fonction de la densité) est comprise comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité $\mathrm{div}\, v = 0$.

Remarque : On rappelle que l'équation de quantité de mouvement est une équation vectorielle, on a pour tout i entre 1 et d :

$$\partial_t v_i + \sum_{j=1}^{d} v_j \partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} p - \nu \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2 v_i = f_i.$$

Équations d'Euler incompressible homogène Dans le cas d'un fluide non-visqueux, incompressible homogène (on dit parfois fluide parfait), on obtient le système

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = f. \end{cases} \tag{1.20}$$

Exercice : Montrer que pour une solution régulière (v,p) de (1.19) on a le bilan local d'énergie suivant

$$\underbrace{\partial_t\left(\frac{|v|^2}{2}\right)}_{=\text{energie cinétique loc.}} + \operatorname{div}\left(\left(\frac{|v|^2}{2}+p\right)v - \nu(\nabla v)^t.v\right) + \nu\underbrace{\operatorname{Tr}((\nabla v)^t\,\nabla v)}_{=|\nabla v|^2} = f\cdot v. \tag{1.21}$$

1.5 Vorticité

La vorticité au sein de l'écoulement est définie comme suit :

$$\boxed{\omega = \operatorname{curl} v} \tag{1.22}$$

où

— si $d = 2$

$$\operatorname{curl} v := \nabla\wedge v = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \in \mathbb{R},$$

mais on peut également écrire $\omega = \nabla^{\perp}\cdot v$ où $\nabla^{\perp} := (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})^t$;

— si $d = 3$

$$\operatorname{curl} v := \nabla\wedge v = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

Remarque : En français l'opérateur curl est appelé rot.
Pour comprendre cette notion, on peut considérer un fluide en rotation dont le champ de vitesse est donné en coordonnées cylindriques par l'équation $v(r) = r\Omega\wedge e_r$ où Ω est la vitesse angulaire. On a alors $\omega = \operatorname{curl} v = 2\Omega$. Ainsi, la vorticité doit être comprise comme la mesure de la vitesse angulaire locale des particules de fluides.

Exercice : on considère b un champ scalaire, A un champ vectoriel, vérifier les formules suivantes

$$\operatorname{curl}(\nabla b) = 0 \tag{1.23}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} A) = 0 \tag{1.24}$$

$$\operatorname{curl}(bA) = b(\operatorname{curl} A) + (\nabla b) \wedge A \tag{1.25}$$

$$(A \cdot \nabla) A = \frac{1}{2} \nabla |A|^2 - A \wedge \operatorname{curl} A \tag{1.26}$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} A) = \nabla \operatorname{div} A - \Delta A \tag{1.27}$$

Pour simplifier, on supposera dans toute la suite que $f \equiv 0$ et que les équations (1.19)-(1.20) sont posées sur $\mathbb{R}^d$ tout entier.

1.5.1 Écoulements bidimensionnels

En appliquant l'opérateur curl au système (1.19), on obtient quand $d = 2$ l'équation scalaire :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega; \tag{1.28}$$

Pour un fluide non-visqueux ($\nu = 0$), cela implique que la vorticité est conservée le long des trajectoires $X(t,a) := X(t;0,a)$:

$$\omega(t, X(t,a)) = \omega^0(a), \qquad \forall\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{R}^2.$$

Formulation vorticité-courant Comme $\operatorname{div} v = 0$, il existe une fonction courant (unique à une constante additive près), notée $\psi(t,x)$, telle que

$$v = \nabla^{\perp} \psi := (-\partial_{x_2} \psi, \partial_{x_1} \psi)^t. \tag{1.29}$$

En appliquant alors l'opérateur curl obtient l'équation de Poisson :

$$\omega = \Delta \psi. \tag{1.30}$$

On peut alors exprimer ψ comme la convolution du potentiel newtonien avec ω (ref : Evans (PDE, Chap 2) ou Folland (1995)) :

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y| \omega(t,y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^2,$$

et en différentiant

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(x-y) \omega(t,y)\, dy, \qquad \text{où} \quad K_2(x) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right)^t. \tag{1.31}$$

On retrouve donc la vitesse à partir de la vorticité ω au moyen d'un opérateur nonlocal, la loi (1.31) ci-dessous est appelée loi de Biot-Savart (utilisée en électromagnétisme) et on écrit $v = BS[\omega] = K_2 * \omega$.

Proposition 1.5 (Formulation vorticité-courant 2D)**.** *Pour des écoulements bidimensionnnels décroissant vers* 0 *suffisamment vite quand* $|x| \to +\infty$*, les équations de Navier-Stokes incompressible* (1.19) *sont équivalentes à la formulation vorticité courant*

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega, \\ v(t,x) = BS[\omega](t,x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} K_2(x-y) \omega(t,y)\, dy, \end{cases} \qquad \forall\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^2} \tag{1.32}$$

La pression peut également être retrouvée en résolvant l'équation de Poisson :

$$-\Delta p = \operatorname{div}(v \cdot \nabla v) = \operatorname{Tr}(\nabla v)^2 \tag{1.33}$$

1.5.2 Écoulements tridimensionnels

En appliquant l'opérateur curl au système (1.19), on obtient quand $d = 3$ l'équation vectorielle :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla v + \nu \Delta \omega; \tag{1.34}$$

On souhaite obtenir une formulation vorticité-courant similaire au cas bidimensionnel.

ref : bertozzi, majda section 2.4

Décomposition de Hodge et loi de Biot-Savart Dans le cas $3d$, on doit résoudre le problème

$$\begin{cases} \operatorname{curl} v = \omega, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \tag{1.35}$$

qui est sur-déterminé a priori car on a 4 équations pour seulement 3 inconnues (les trois composantes du champ de vitesse).

Proposition 1.6. *Soit $\omega \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, décroisssant vers 0 suffisamment vite à l'infini. Alors*

1. *Eq (1.35) admet une solution régulière v qui s'annule quand $|x| \to +\infty$ si et seulement si*

$$\operatorname{div} \omega = 0;$$

2. *si $\operatorname{div} \omega = 0$, alors la solution v satisfait*

$$v = -\operatorname{curl} \psi,$$

où ψ est la fonction courant vectorielle qui satisfait l'équation de Poisson (vectorielle)

$$\Delta \psi = \omega.$$

La vitesse v est alors donnée par la formule de Biot-Savart

$$v(x) = BS[\omega](x) := \int_{\mathbb{R}^3} K_3(x-y)\omega(y)\,dy, \quad \textit{où} \quad K_3(x)h = \frac{1}{4\pi}\frac{x \wedge h}{|x|^3}, \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^3. \tag{1.36}$$

Démonstration. — D'abord, si v est solution de (1.35) alors en particulier $\omega = \operatorname{curl} v$ et donc par l'identité (1.24) on a nécessairement $\operatorname{div} \omega = 0$.

— Dans l'autre sens, on suppose que $\operatorname{div} \omega = 0$ et on veut construire v solution de (1.35). On commence par introduire ψ solution de l'équation de Poisson

$$\Delta \psi = \omega \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\omega(y)}{|x-y|}\,dy. \tag{1.37}$$

ref : Evans (PDE, Chap 2) ou Folland (1995).

Rappelons maintenant l'identité (1.27) :

$$\omega = \Delta \psi = -\operatorname{curl}\operatorname{curl} \psi + \nabla \operatorname{div} \psi, \tag{1.38}$$

identité qu'on multiplie par $\nabla \operatorname{div} \psi$ et qu'on intègre ensuite sur espace :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \operatorname{div} \psi|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl}\operatorname{curl} \psi \cdot \nabla \operatorname{div} \psi\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot \nabla \operatorname{div} \psi\,dx$$

Par intégration par partie, en utilisant de nouveau l'identité $\operatorname{div}\operatorname{curl} = 0$ et le fait que $\operatorname{div}\omega = 0$, on obtient en revenant à (1.38) :

$$\nabla \operatorname{div}\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}\psi.$$

On pose donc naturellement

$$v = -\operatorname{curl}\psi,$$

qui satisfait directement $\operatorname{curl} v = \omega$ et $\operatorname{div} v = 0$. On achève la démonstration en disant que l'expression de la vitesse (1.36) est obtenue en prenant le curl de l'expression (1.37).

□

1.6 Compléments - Adimensionnement et régimes d'écoulement

Chapitre 2

Solutions fortes des équations de Navier-Stokes et d'Euler incompressible

Pour $\nu \geq 0$, on s'intéresse au système

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p - \nu \Delta v = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \qquad \forall\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ d = 2 \text{ ou } 3, \tag{2.1}$$

muni de la condition initiale

$$v_{|t=0} = v^0. \tag{2.2}$$

On s'intéresse dans ce chapitre aux solutions régulières (/ "classiques" / fortes), c'est-à-dire aux solutions pour lesquelles l'équation ci-dessus est satisfaite pour tout temps t et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Le premier résultat principal de ce chapitre est un résultat de caractère bien-posé localement en temps.

Théorème 2.1. *Soient* $\nu \geq 0$, $v^0 \in H^m(\mathbb{R}^d)$, $m > \frac{d}{2} + 2$, *avec* $\operatorname{div} v^0 = 0$. *Alors il existe un temps* T,

$$T \leq \frac{1}{C\|v^0\|_{H^m}},$$

avec $C = C(m)$ *une constante positive dépendant de l'indice de régularité* m, *tel qu'il existe un unique* $v \in \mathscr{C}([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}^1([0,T] \cap H^{m-r}(\mathbb{R}^d))$ *solution du problème* (2.1)-(2.2), *avec* $r = 1$ *si* $\nu = 0$ *(Équations d'Euler),* $r = 2$ *si* $\nu > 0$ *(Équations de Navier-Stokes).*

Méthodologie classique

1. Introduction d'un problème régularisé $(\mathscr{P}_\varepsilon)_\varepsilon$ - existence et unicité de la solution v_ε de $(\mathscr{P}_\varepsilon)_\varepsilon$ par un théorème de point fixe;
2. Estimations uniformes en ε sur $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ (estimations d'énergie);
3. Passage à la limite $\varepsilon \to 0 \rightsquigarrow$ existence locale en temps d'une solution v au problème (2.1)-(2.2). On distinguera ici les deux cas $\nu > 0$, $\nu = 0$ pour obtenir la régularité en temps voulue;
4. unicité de la solution du problème limite;
5. solution globale en temps?

référence principale du chapitre : livre de Bertozzi et Majda *Vorticity and incompressible flow*

2.1 Préambule

2.1.1 Espaces de Sobolev

L'espace $H^m(\mathbb{R}^d)$, $m \in \mathbb{N}$, est formé par les fonctions $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ qui sont telles que pour tout multi-indice α, $0 \leq |\alpha| \leq m$, on a $D^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, où $D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ est une dérivée partielle au sens des distributions.
Il est muni du produit scalaire et de la norme suivants :

$$\langle u, v\rangle_{H^m} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx, \qquad \|v\|_{H^m} := \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Rmq : de manière plus générale l'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des fonctions telles que $D^\alpha v \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

On peut aussi introduire des espace de Sobolev pour des indices $s \in \mathbb{R}$ non entiers. On introduit pour cela la fonctionnelle définie sur l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\|\cdot\|_{H^s} \,:\, \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+,$$
$$v \mapsto \|v\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est alors défini comme le complété de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^s}$. Bien sûr, si $s = m \in \mathbb{N}$, cette norme est équivalente à la précédente.

Nous listons ci-dessous des résultats utiles pour la suite du chapitre/cours.

Lemme 2.2.

1. *Pour $s > \dfrac{d}{2}$, l'espace $H^{s+k}(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, s'injecte continûment dans l'espace $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|v\|_{C^k} \leq C \|v\|_{H^{s+k}}. \tag{2.3}$$

2. *Inégalité de Gagliardo-Nirenberg : soient deux réels $1 \leq q, r \leq \infty$ et un entier m. Soient α un réel et j un entier naturel tels que*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q} \qquad \text{et} \qquad \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1.$$

Alors on a l'inégalité

$$\|D^j v\|_{L^p} \leq C \|v\|_{L^q}^{1-\alpha} \|D^m v\|_{L^r}^{\alpha}. \tag{2.4}$$

Cas particulier : inégalité de Ladyzhenskaya

$$\|v\|_{L^4} \leq C \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|\nabla v\|_{L^2}^{\frac{d}{4}}. \tag{2.5}$$

Lemme 2.3.

1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que, pour tous $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^m(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|uv\|_{H^m} \leq C \left(\|u\|_{L^\infty} \|D^m v\|_{L^2} + \|D^m u\|_{L^2} \|v\|_{L^\infty} \right), \tag{2.6}$$

avec l'estimation de commutateur :

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(uv) - u D^\alpha v\|_{L^2} \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^\infty} \|D^{m-1} v\|_{L^2} + \|D^m u\|_{L^2} \|v\|_{L^\infty} \right). \tag{2.7}$$

2. *Pour tout* $s > \dfrac{d}{2}$, *l'espace* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *est une algèbre de Banach, c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$ *telle que pour tous* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *:*
$$\|uv\|_{H^s} \le C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}.$$

preuve : Bertozzi & Majda p 130

Lemme 2.4 (Interpolation)**.** *Soit* $s > 0$*, il existe une constante positive* $C = C(s)$ *telle pour tout* $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ *et* $r \in]0, s[$*,*
$$\|v\|_{H^r} \le C\ \|v\|_{L^2}^{1-r/s}\ \|v\|_{H^s}^{r/s}. \tag{2.8}$$

On rappelle enfin le résultat d'injection compacte suivant.

Théorème 2.5 (Rellich-Kondrachov)**.** *On suppose que* $\mathscr{U}$ *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$ *avec* $\partial\mathscr{U} \in \mathscr{C}^1$*. On suppose que* $1 \le p < d$*. Alors*
$$W^{1,p}(\mathscr{U}) \subset\subset L^q(\mathscr{U}), \qquad \forall\ 1 \le q < p^* := \frac{dp}{d-p}.$$

Ainsi, pour tout ouvert borné $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, l'espace $H^{m+1}(\mathscr{U})$ s'injecte de manière compacte dans $H^m(\mathscr{U})$.

2.1.2 Opérateur de régularisation

On se donne un noyau régularisant, c'est-à-dire une fonction radiale
$$\eta = \eta(|x|) \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \qquad \eta \ge 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \eta\, dx = 1, \tag{2.9}$$
et on introduit, pour $\varepsilon > 0$, l'opérateur J_ε qui à $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, associe
$$(J_\varepsilon v)(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\mathbb{R}^d} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) v(y)dy, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Proposition 2.6. *Pour tout* $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $J_\varepsilon v$ *est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$*. On a de plus les propriétés suivantes :*

1. $\|J_\varepsilon v\|_{L^p} \le \|v\|_{L^p}$ *et, pour* $p < +\infty$, $J_\varepsilon v$ *converge vers* v *dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.
2. *si* $v \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$, $J_\varepsilon v \to v$ *uniformément sur tout compact* $K \subset\subset \mathbb{R}^d$*, et*
$$\|J_\varepsilon v\|_{L^\infty} \le \|v\|_{L^\infty};$$
3. *si* $v \in H^m(\mathbb{R}^d)$*, alors* J_ε *commute avec les dérivées au sens des distributions*
$$D^\alpha J_\varepsilon v = J_\varepsilon D^\alpha v, \qquad \forall\ |\alpha| \le m;$$
4. *soit* q *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*, pour tout* $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *:*
$$\int_{R^d} (J_\varepsilon v)\cdot u\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot (J_\varepsilon u)\ dx;$$

5. *si $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $J_\varepsilon v$ converge vers v dans H^s et on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon v - v\|_{H^s} = 0,$$

$$\|J_\varepsilon v - v\|_{H^{s-1}} \leq C\varepsilon \|v\|_{H^s}; \tag{2.11}$$

6. *si $v \in H^m(\mathbb{R}^d)$, $m, k \in \mathbb{N}$:*

$$\|J_\varepsilon v\|_{H^{m+k}} \leq \frac{C_{mk}}{\varepsilon^k} \|v\|_{H^m},$$
$$\|J_\varepsilon D^k v\|_{L^\infty} \leq \frac{C_k}{\varepsilon^{d/2+k}} \|v\|_{L^2},$$

où C_{km}, C_k sont deux constantes positives dépendant respectivement de m, k et de k.

voir preuves : Boyer & Fabrie (Prop II.2.25 p.62) ; Bertozzi & Majda P.131

2.1.3 Décomposition de Hodge et projecteur de Leray

La pression, comme mentionné au Chapitre 1, est vue comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} v = 0$, ce n'est donc pas en soit une inconnue du système. Si on connaît le champ de vitesse v on peut effectivement retrouver p. Pour cela, on applique l'opérateur divergence à l'équation de quantité de mouvement (i.e. on applique ∂_{x_i} à chacune des d composantes de l'éq. de quantité de mouvement et on somme les d équations) :

$$\partial_t \sum_i \partial_{x_i} v_i + \sum_{i,j} \partial_{x_i}\left(v_j \partial_{x_j} v_i\right) + \sum_i \partial^2_{x_i} p - \nu \sum_{i,j} \partial^2_{x_j}(\partial_{x_i} v_i) = 0,$$

et on utilise la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} v = 0$ pour en déduire que p satisfait une équation de Poisson :

$$\sum_{i,j} \partial_{x_i} v_j \,\partial_{x_j} v_i + \sum_i \partial^2_{x_i} p = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{-\Delta p = Tr(\nabla v)^2} \tag{2.12}$$

Ainsi, on peut réécrire le système de Navier-Stokes/Euler en remplaçant ∇p par son expression en terme de $Tr(\nabla v)^2$ (on renvoie une nouvelle fois à Evans Chap 2, éq de Laplace/Poisson). On remarque de plus que, pour des solutions régulières, ∇p est orthogonal à v dans $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla p \cdot v \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} p \operatorname{div}(v) \, dx = 0.$$

Éliminer p du système revient alors à appliquer à l'équation de quantité de mouvement un opérateur de projection sur l'ensemble des fonctions à divergence nulle. Nous définissons cet opérateur de projection, appelé projecteur de Leray, dans la proposition suivante.

Proposition 2.7. *Tout champ de vecteur $u \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ admet une unique décomposition orthogonale*

$$u = w + \nabla q, \qquad \textit{avec} \quad \operatorname{div} w = 0, \tag{2.13}$$

et satisfaisant les propriétés suivantes :

1. *$w, \nabla q \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$;*

2. $\int_{\mathbb{R}^d} w(x)\cdot\nabla q(x)\,dx = 0$ *(i.e. $w\perp\nabla q$ dans L^2);*
3. $\|D^\alpha u\|_{L^2}^2 = \|D^\alpha w\|_{L^2}^2 + \|\nabla D^\alpha q\|_{L^2}^2$.

On peut alors définir l'opérateur de projection de Leray :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\ : L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d) &\to L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d),\\ \mathbb{P}(u) = \mathbb{P}(w+\nabla q) &:= w. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Démonstration. On renvoie à Bertozzi & Majda p.33. Pour déterminer q et w, on procède de manière analogue à la discussion d'introduction : on applique l'opérateur divergence à l'équation (2.13) pour trouver q comme solution de l'équation de Poisson $-\Delta q = \operatorname{div} u$ et on pose ensuite $w = u - \nabla q$. □

Remarque : Le projecteur de Leray est parfois défini grâce aux opérateurs "pseudo-différentiels" (définis via l'analyse de Fourier) par la formule

$$\mathbb{P}(u) = u - \nabla\Delta^{-1}(\operatorname{div} u),$$

voir par exemple le livre Bahouri, Chemin, Danchin *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations* (Chapitre 5).

On peut facilement étendre la proposition précédente aux cas des fonctions dans H^m, comme énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Pour tout champ de vecteur $u\in H^m(\mathbb{R}^d)$, $m\in\mathbb{N}$, il existe une unique décomposition orthogonale*

$$u = w + \nabla q,$$

telle que le projecteur de Leray $\mathbb{P}(u) = w$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{P}(u)$, $\nabla q\in H^m(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\mathbb{P}(u)\cdot\nabla q\,dx = 0,\qquad \operatorname{div}(\mathbb{P}u) = 0,\qquad \|\mathbb{P}u\|_{H^m}^2 + \|\nabla q\|_{H^m}^2 = \|u\|_{H^m}^2.$$

Dans la suite on introduit l'espace de Banach

$$V^m := \left\{v\in H^m(\mathbb{R}^d):\ \operatorname{div} v = 0\right\}; \tag{2.15}$$

2. $\mathbb{P}$ *commute avec les dérivées au sens des distributions*

$$\mathbb{P}D^\alpha u = D^\alpha\mathbb{P}u,\qquad \forall\ u\in H^m(\mathbb{R}^d),\quad |\alpha|\le m;$$

3. $\mathbb{P}$ *commute avec l'opérateur de régularisation J_ε*

$$\mathbb{P}(J_\varepsilon u) = J_\varepsilon(\mathbb{P}u),\qquad \forall\ u\in H^m(\mathbb{R}^d),\quad \varepsilon>0;$$

4. $\mathbb{P}$ *est un opérateur symétrique, pour tout $u, v\in H^m(\mathbb{R}^d)$*

$$<\mathbb{P}u, v>_{H^m} = <u, \mathbb{P}v>_{H^m}.$$

2.2 Unicité de la solution

Commençons par rappeler le lemme de Gronwall

Lemme 2.9 (Lemme de Gronwall)**.** *Si a et b sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ localement intégrables, alors pour tout fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t) \qquad \forall\ t,$$

on a l'inégalité

$$y(t) \leq y(0) \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Proposition 2.10. *Soient $T > 0$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{C}([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$, deux solutions du problème (2.1)-(2.2). On suppose de plus que $\nabla v_2 \in L^1([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Alors $v_1 = v_2$.*

Démonstration. On a les deux équations

$$\begin{cases} \partial_t v_1 + (v_1 \cdot \nabla)v_1 + \nabla p_1 - \nu\Delta v_1 = 0, \\ \partial_t v_2 + (v_2 \cdot \nabla)v_2 + \nabla p_2 - \nu\Delta v_2 = 0, \end{cases}$$

de sorte que la différence $\delta v := v_1 - v_2$ satisfait

$$\partial_t \delta v + (v_1 \cdot \nabla)\delta v + (\delta v \cdot \nabla)v_2 + \nabla\delta p - \nu\Delta\delta v = 0.$$

Nous prenons maintenant le produit scalaire (dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) avec δv et obtenons

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\delta v|^2}{2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} v_1 \cdot \nabla\frac{|\delta v|^2}{2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\delta v \cdot \nabla)v_2 \cdot \delta v\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\delta p \cdot \delta v\,dx - \nu\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\delta v \cdot \delta v = 0.$$

En intégrant par parties et en utilisant la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} v_i = 0$, cette équation devient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\delta v|^2}{2}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\delta v \cdot \nabla)v_2 \cdot \delta v\,dx + \nu\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\delta v|^2 = 0,$$

et ainsi

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |\delta v|^2\,dx \;\leq\; 2\|\nabla v_2\|_{L^\infty_x}\int_{\mathbb{R}^d} |\delta v|^2\,dx.$$

Le lemme de Gronwall permet alors de conclure :

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} |\delta v|^2\,dx \;\leq\; \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |(\delta v)_{|t=0}|^2\,dx\right)}_{=0} \exp\left(2\int_0^T \|\nabla v_2(t,\cdot)\|_{L^\infty_x}\,dt\right).$$

□

2.3 Caractère bien posé du problème régularisé

Pour $\varepsilon > 0$, on regarde les équations de Navier-Stokes régularisées :

$$\begin{cases} \partial_t v_\varepsilon + J_\varepsilon\Big[(J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon v_\varepsilon)\Big] = -\nabla p_\varepsilon + \nu J_\varepsilon(J_\varepsilon \Delta v_\varepsilon), \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \\ (v_\varepsilon)_{|t=0} = v^0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Le problème $(\mathscr{P}_\varepsilon)_\varepsilon$ que nous allons étudier est obtenu en appliquant la projecteur de Leray aux équations précédentes (on utilise en particulier le fait que $\mathbb{P}v_\varepsilon = v_\varepsilon$ et $\mathbb{P}\nabla p_\varepsilon = 0$)

$$\begin{cases} \partial_t v_\varepsilon + \mathbb{P}J_\varepsilon\Big[(J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon v_\varepsilon)\Big] = \nu J_\varepsilon(J_\varepsilon \Delta v_\varepsilon), \\ (v_\varepsilon)_{|t=0} = v^0. \end{cases} \tag{2.17}$$

L'existence et l'unicité de la solution v_ε repose sur la généralisation suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz aux espaces de Banach de dimension infinie (qui repose sur un théorème de point fixe).

Lemme 2.11. *Soit B un espace de Banach et $O \subset B$ un sous-espace ouvert de B. Soit $F : O \to B$ une application continue. On suppose de plus que F est localement Lipschitzienne, i.e. pour tout $X \in O$, il existe une constante $L > 0$ et un voisinage $V_X \subset O$ tel que*

$$\|F(X_1) - F(X_2)\|_B \leq L\|X_1 - X_2\|_B, \qquad \forall\ X_1, X_2 \in V_X.$$

Alors, pour tout $X^0 \in O$, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(X), \\ X_{|t=0} = X^0, \end{cases} \tag{2.18}$$

admet une unique solution $X \in \mathscr{C}^1([0, T[; O)$.

Lemme 2.12. *Sous les conditions du Lemme précédent, l'unique solution $X \in \mathscr{C}^1([0, T[; O)$ du problème de Cauchy (2.18) soit existe globalement en temps, soit, si $T < \infty$, sort de l'ouvert O quand $t \to T^-$.*

Théorème 2.13 (Existence globale et unicité de la solution de $(\mathscr{P}_\varepsilon)$)**.** *Soit $v^0 \in V^m$, $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\nu \geq 0$, il existe une unique solution $v_\varepsilon \in \mathscr{C}^1([0, +\infty[; V^m)$ au problème régularisé (2.17).*

Preuve du Théorème 2.13. — étape 1 (existence et unicité localement en temps). On réécrit le système (2.17) sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\varepsilon}{dt} = F_\varepsilon(v_\varepsilon), \\ (v_\varepsilon)_{|t=0} = v^0 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad F_\varepsilon(v) := \nu J_\varepsilon(J_\varepsilon \Delta v) - \mathbb{P}J_\varepsilon\Big[(J_\varepsilon v)\cdot\nabla(J_\varepsilon v)\Big]. \tag{2.19}$$

On vérifie tout d'abord que F_ε envoie V^m dans V^m, la régularité étant assurée par l'opérateur de régularisation J_ε et la propriété de divergence nulle par l'opérateur de projection.

On a par ailleurs, pour tous $v_1, v_2 \in V^m$:

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon(v_1) - F_\varepsilon(v_2)\|_{H^m} &\le \nu \|J_\varepsilon(J_\varepsilon \Delta(v_1 - v_2))\|_{H^m} + \Big\| \mathbb{P} J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon v_1) \cdot \nabla (J_\varepsilon v_1) \Big] - \mathbb{P} J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon v_2) \cdot \nabla (J_\varepsilon v_2) \Big] \Big\|_{H^m} \\ &= A_1 + A_2,\end{aligned}$$

avec d'une part

$$\begin{aligned}A_1 &= \nu \|J_\varepsilon(J_\varepsilon \Delta(v_1 - v_2))\|_{H^m} \\ &\le \nu \|J_\varepsilon(J_\varepsilon(v_1 - v_2))\|_{H^{m+2}} \\ &\le C \frac{\nu}{\varepsilon^2} \|v_1 - v_2\|_{H^m},\end{aligned}$$

et d'autre part (en utilisant en particulier l'inégalité (2.6))

$$\begin{aligned}A_2 &\le \Big\| \mathbb{P} J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon v_1) \cdot \nabla J_\varepsilon (v_1 - v_2) \Big] \Big\|_{H^m} + \Big\| \mathbb{P} J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon (v_1 - v_2) \cdot \nabla (J_\varepsilon v_2) \Big] \Big\|_{H^m} \\ &\le \Big\| J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon v_1) \cdot \nabla J_\varepsilon (v_1 - v_2) \Big] \Big\|_{H^m} + \Big\| J_\varepsilon \Big[(J_\varepsilon (v_1 - v_2) \cdot \nabla (J_\varepsilon v_2) \Big] \Big\|_{H^m} \\ &\le C \Big[\|J_\varepsilon v_1\|_{L^\infty} \|D^m J_\varepsilon \nabla (v_1 - v_2)\|_{L^2} + \|D^m J_\varepsilon v_1\|_{L^2} \|J_\varepsilon \nabla (v_1 - v_2)\|_{L^\infty} \Big] \\ &\quad + C \Big[\|J_\varepsilon (v_1 - v_2)\|_{L^\infty} \|D^m J_\varepsilon \nabla v_2\|_{L^2} + \|D^m J_\varepsilon (v_1 - v_2)\|_{L^2} \|J_\varepsilon \nabla v_2\|_{L^\infty} \Big] \\ &\le \frac{C}{\varepsilon^{d/2+m+1}} \Big(\|v_1\|_{L^2} + \|v_2\|_{L^2} \Big) \|v_1 - v_2\|_{H^m}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|F_\varepsilon(v_1) - F_\varepsilon(v_2)\|_{H^m} \le C(\varepsilon, \|v_i\|_{L^2}) \|v_1 - v_2\|_{H^m},$$

et on en déduit par le Lemme 2.11 qu'il existe une unique solution v_ε pour $T > 0$ suffisamment petit (on prend $O = \{v \in V^m : \|v\|_{H^m} \le M\}$, pour n'importe quel $M > \|v^0\|_{H^m}$).

— étape 2 (continuation - existence globale en temps). D'après le Lemme 2.12, si le temps maximal d'existence , T^*, de v_ε était tel que $T^* < +\infty$ alors on aurait $\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} \to +\infty$ quand $t \to (T^*)^-$. Or, on a par une estimation similaire aux précédentes

$$\begin{aligned}\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} &\le \|v^0\|_{H^m} + \int_0^t \|F_\varepsilon(v_\varepsilon(s,\cdot))\|_{H^m} ds \\ &\le \|v^0\|_{H^m} + C(\varepsilon, \|v_\varepsilon\|_{L^\infty_t L^2_x}) \int_0^t \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|_{H^m} ds. \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut faire une estimation d'énergie pour estimer $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty_t L^2_x}$. On multiplie pour cela l'équation (2.17) par v_ε et on intègre en espace, utilisant les propriétés de symétrie de J_ε et $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |v_\varepsilon|^2 \, dx &= \nu \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon \cdot J_\varepsilon^2 \Delta v_\varepsilon \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon \cdot \mathbb{P} J_\varepsilon [(J_\varepsilon v_\varepsilon \cdot \nabla)(J_\varepsilon v_\varepsilon)] \, dx \\ &= \nu \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon v_\varepsilon \cdot J_\varepsilon \Delta v_\varepsilon \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon v_\varepsilon \cdot \nabla \left[\frac{|J_\varepsilon v_\varepsilon|^2}{2} \right] dx \\ &= -\nu \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\operatorname{div}(J_\varepsilon v_\varepsilon)}_{=0} |J_\varepsilon v_\varepsilon|^2 \, dx.\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'estimation d'énergie

$$\|v_\varepsilon\|^2_{L^\infty_t L^2_x} + 2\nu \|J_\varepsilon \nabla v_\varepsilon\|^2_{L^2_t L^2_x} \leq \|v^0\|^2_{L^2_x}. \tag{2.21}$$

En revenant à (2.20) et en utilisant le lemme de Gronwall (sous forme intégrale), on en déduit que

$$\sup_{t\in[0,T^*[} \|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \|v^0\|_{H^m} \exp\Big(C(\varepsilon, \|v^0\|_{L^2})T^*\Big),$$

ce démontre que $T^* = +\infty$ et achève la démonstration du Théorème 2.13.

□

2.4 Estimations uniformes par rapport au paramètre ε

On a dans la section précédente obtenu une estimation de $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty_t H^m_x}$ (cf (2.20)), malheureusement cette estimation n'est pas uniforme par rapport au paramètre ε. Nous allons dans cette section essayer de généraliser l'estimation d'énergie (2.21) (qui, elle, est bien uniforme en ε) aux dérivées d'ordre plus élevé de v_ε.

Proposition 2.14 (Estimation uniforme dans H^m)**.** *Soit $v^0 \in V^m$, et $m > \dfrac{d}{2}+1$. Alors l'unique solution $v_\varepsilon \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[; V^m)$ du problème $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ (2.17) est telle que*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|^2_{H^m} + \nu\|J_\varepsilon \nabla v_\varepsilon\|^2_{H^m} \leq C\|v_\varepsilon\|^3_{H^m}, \tag{2.22}$$

et pour tout $T < (C\|v^0\|_{H^m})^{-1}$:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \frac{\|v^0\|_{H^m}}{1 - CT\|v^0\|_{H^m}}. \tag{2.23}$$

Ainsi, pour $m > \frac{d}{2}+1$, $T < (C\|v^0\|_{H^m})^{-1}$, la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément bornée dans $\mathscr{C}([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. De manière similaire à l'estimation d'énergie obtenue à la section précédente, nous appliquons l'opérateur D^α, $|\alpha| \leq m$ à l'équation (2.17), et on multiplie le résultat par $D^\alpha v_\varepsilon$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \partial_t v_\varepsilon \cdot D^\alpha v_\varepsilon \,dx - \nu \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha J^2_\varepsilon \Delta v_\varepsilon \cdot D^\alpha v_\varepsilon \,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \mathbb{P} J_\varepsilon\big((J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\cdot D^\alpha v_\varepsilon \,dx.$$

Par intégration par partie et en utilisant les propriétés de J_ε et $\mathbb{P}$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha v_\varepsilon|^2 \,dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha J_\varepsilon \nabla v_\varepsilon|^2 \,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \big((J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\cdot \mathbb{P} J_\varepsilon D^\alpha v_\varepsilon \,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \Big[J_\varepsilon\big((J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon\big) - D^\alpha J_\varepsilon\big((J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\Big]\cdot \mathbb{P} D^\alpha v_\varepsilon \,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(J_\varepsilon v_\varepsilon)\, |D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon|^2 \,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \Big[J_\varepsilon\big((J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon\big) - D^\alpha J_\varepsilon\big((J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\Big]\cdot \mathbb{P} D^\alpha v_\varepsilon \,dx \\
&= 0 + \int_{\mathbb{R}^d} \Big[(J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon - D^\alpha\big((J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\Big]\cdot \mathbb{P} J_\varepsilon D^\alpha v_\varepsilon \,dx.
\end{aligned}$$

En sommant sur $|\alpha| \le m$ et en revenant à l'estimation de commutateur (2.7), on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le|\alpha|\le m} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left[(J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon) - D^\alpha\big((J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\right]\cdot \mathbb{P} J_\varepsilon D^\alpha v_\varepsilon\, dx \right| \\
&\le \|v_\varepsilon\|_{H^m} \sum_{0\le|\alpha|\le m} \left\| (J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla D^\alpha J_\varepsilon v_\varepsilon) - D^\alpha\big((J_\varepsilon v_\varepsilon)\cdot\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\big)\right\|_{L^2} \\
&\le C\|v_\varepsilon\|_{H^m} \left[\|\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^\infty} \|D^{m-1}\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^2} + \|D^m J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^\infty}\right].
\end{aligned}$$

On en déduit l'estimation

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{H^m}^2 + \nu\|J_\varepsilon\nabla v_\varepsilon\|_{H^m}^2 \le C\|\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^\infty}\|v_\varepsilon\|_{H^m}^2. \tag{2.24}$$

On utilise ensuite l'injection de Sobolev (2.3) au membre de droite, $\|\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{L^\infty} \le C\|J_\varepsilon v_\varepsilon\|_{H^m}$ valide pour $m > \frac{d}{2}+1$, et on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{H^m}^2 + \nu\|J_\varepsilon\nabla v_\varepsilon\|_{H^m}^2 \le C\|v_\varepsilon\|_{H^m}^3 \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{H^m} \le C\|v_\varepsilon\|_{H^m}^2. \tag{2.25}$$

On conclut en intégrant cette EDO entre $t=0$ et $t=T$:

$$\|v_\varepsilon(T)\|_{H^m}^{-1} \ge \|v^0\|_{H^m}^{-1} - CT \quad \Longrightarrow \quad \|v_\varepsilon(T)\|_{H^m} \le \frac{\|v^0\|_{H^m}}{1-CT\|v^0\|_{H^m}}.$$

□

Proposition 2.15. *Supposons de plus que $m > \dfrac{d}{2}+2$, alors la suite $(\partial_t v_\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément bornée dans $L^\infty(]0,T[;H^{m-2}(\mathbb{R}^d))$.*

Démonstration. On revient à l'équation (2.17) :

$$\begin{aligned}
\|\partial_t v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{m-2}} &\le \nu\|J_\varepsilon^2\Delta v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{m-2}} + \left\|\mathbb{P}J_\varepsilon\big(J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon\big)(t,\cdot)\right\|_{H^{m-2}} \\
&\le C\nu\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} + C\left\|\big(J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla\big)J_\varepsilon v_\varepsilon(t,\cdot)\right\|_{H^{m-2}}
\end{aligned}$$

et comme H^{m-2} est une algèbre de Banach (on a supposé $m-2 > \dfrac{d}{2}$) on en déduit l'estimation souhaitée :

$$\begin{aligned}
\|\partial_t v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{m-2}} &\le C\nu\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} + C\,\|J_\varepsilon v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{m-2}}\,\|\nabla J_\varepsilon v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{m-2}} \\
&\le C\nu\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} + C\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m}^2.
\end{aligned}$$

□

2.5 Passage à la limite $\varepsilon \to 0$

La section précédente nous a permis d'identifier les espaces fonctionnels dans lesquels la suite $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ était contrôlée. Il nous reste à montrer que la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ converge (en un sens à préciser) vers une limite v qui est bien solution au sens classique des équations de Navier-Stokes ($\nu > 0$) ou d'Euler ($\nu = 0$).

2.5.1 Convergence faible, théorèmes de compacité

Definition 2.16. *Soit E un espace de Banach et E' son espace dual.*

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E converge faiblement vers $u \in E$, si pour tout $f \in E'$ on a

$$f(u_n) = < f, u_n >_{E',E} \longrightarrow < f, u >_{E',E} = f(u) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de E' converge faible- vers $f \in E'$, si pour tout $u \in E$ on a*

$$f_n(u) = < f_n, u >_{E',E} \longrightarrow < f, u >_{E',E} = f(u) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Rappelons des versions du théorème de Banach-Alaoglu qui permettent classiquement d'extraire des sous-suites (faiblement) convergentes à partir d'estimations uniformes.

Théorème 2.17. — *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) qui converge faiblement dans E ;*

— *Soit E un espace de Banach séparable, et soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans l'espace dual E'. Alors il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge dans E' pour la topologie faible-*.*

Corollaire 2.18. *Soit E un espace de Banach, et (u_n) une suite d'éléments de E (resp. de E') qui converge faiblement (resp. faible-*) vers $u \in E$ (resp $u \in E'$). Alors la suite (u_n) est bornée dans E (resp. dans E') et on a*

$$\|u\|_E \leq \liminf_n \|u_n\|_E \qquad (\textit{resp.} \quad \|u\|_{E'} \leq \liminf_n \|u_n\|_{E'}).$$

Proposition 2.19. *Soit E un espace de Banach réflexif (resp. le dual d'un espace de Banach séparable) et (u_n) une suite bornée dans E. On suppose qu'il existe $u \in E$ telle que toute sous-suite de (u_n) faiblement (faible-*) convergente a une limite égale à u, alors la suite entière (u_n) converge faiblement (resp. faible-*) vers u.*

Au-delà des résultats de convergence de Banach-Alaoglu, nous allons ici nous appuyer sur un résultat de compacité forte, usuellement appelé lemme d'Aubin-Lions (étendu par Simon pour le cas $p = +\infty$ que nous allons utiliser).

Théorème 2.20 (Aubin-Lions-Simon)**.** *Soient $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ trois espace de Banach. On suppose que B_1 s'injecte de façon continue dans B_2 et que B_0 s'injecte de manière compacte dans B_1. Soient $1 \leq p, r \leq +\infty$. Pour $T > 0$, on définit :*

$$E_{p,r} := \left\{ v \in L^p(]0,T[; B_0),\ \frac{dv}{dt} \in L^r(]0,T[; B_2) \right\}.$$

— *si $p < +\infty$, l'injection de $E_{p,r}$ dans $L^p(]0,T[; B_1)$ est compacte;*

— *si $p = +\infty$ et si $r > 1$, l'injection de $E_{p,r}$ dans $\mathscr{C}([0,T]; B_1)$ est compacte.*

Nous renvoyons à [BoyerFabrie, Thm II.5.16] pour une preuve de ce résultat.

2.5.2 Application

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, on suppose $T < (C\|v^0\|_{H^m})^{-1}$.

Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, on considère $B_0 = H^m(K)$ qui s'injecte de manière compacte dans $B_1 = H^{m-1}(K)$, qui lui-même qui s'injecte de façon continue dans $B_2 = H^{m-2}(K)$. Par les estimations des propositions 2.14 et 2.14 on déduit grâce au théorème d'Aubin-Lions-Simon que, pour tout compact K, il existe une sous-suite de (v_ε) dépendant a priori de K, qui converge fortement dans $\mathscr{C}([0,T];H^{m-1}(K))$. Par un argument d'extraction diagonale, on peut choisir la même sous-suite pour tous les compacts $K_n = [-n,n]$, on note cette sous-suite encore (v_ε). On a alors l'existence de $v \in \mathscr{C}([0,T];H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^d))$ tel que

$$v_\varepsilon \to v \qquad \text{fortement dans } \mathscr{C}([0,T];H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^d)). \tag{2.26}$$

Nous montrons finalement dans la proposition suivante que la limite v est en fait plus régulière.

Proposition 2.21. *La limite v de la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait*

$$v \in \mathscr{C}\big([0,T];H^m(\mathbb{R}^d)\big) \cap \mathscr{C}^1\big([0,T];H^{m-r}(\mathbb{R}^d)\big), \tag{2.27}$$

avec $r=1$ si $\nu=0$ (Euler), $r=2$ si $\nu>0$ (Navier-Stokes).

Par le théorème de Banach-Alaoglu, on a facilement que $v \in L^\infty([0,T];H^m(\mathbb{R}^d))$, il nous faut donc montrer que $t \mapsto \|v(t)\|_{H^m}$ est une fonction continue.

Definition 2.22. *Soit Y un espace de Banach. On dit qu'une fonction $f:[0,T]\to Y$ est faiblement continue si pour tout $\psi \in Y'$, la fonction définie par $t \in [0,T] \mapsto \langle \psi, f(t)\rangle_{Y',Y}$ est continue. On note $\mathscr{C}([0,T];Y_w)$, l'ensemble des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeurs dans Y qui sont faiblement continues.*

Montrons tout d'abord que $v \in \mathscr{C}([0,T];H^m_w(\mathbb{R}^d))$. Ceci repose sur une simple application du lemme suivant (corollaire du théorème d'Arzelà-Ascoli, dont on trouvera la preuve dans [Lions *Math. Topics in Fluid Machanics* T1 - Appendix C]) :

Lemme 2.23. *Soit X un espace de Banach réflexif séparable, $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^\infty(]0,T[;X)$ pour un $T \in]0,+\infty[$. On suppose que $f_n \in \mathscr{C}([0,T];Y)$ où Y est un espace de Banach tel que $X \hookrightarrow Y$, Y' est séparable et dense dans X'. De plus on suppose que $\forall \varphi \in Y'$, $<\varphi, f_n(t)>_{Y',Y}$ est uniformément continue en t, uniformément en n, i.e.*

$$\sup_n \left| <\varphi, f_n(t)-f_n(s)>_{Y',Y} \right| \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad |t-s| \to 0.$$

Alors, il existe un sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge dans $\mathscr{C}([0,T];X_w)$.

On applique ce lemme avec $X = H^m(\mathbb{R}^d)$, $Y = H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ en utilisant la convergence forte de v_ε (à extraction d'une sous-suite près) dans $\mathscr{C}([0,T];H^{m-1}_{loc}(\mathbb{R}^d))$.

Nous devons à partir de maintenant séparer la preuve selon que $\nu = 0$ (Euler) ou $\nu > 0$ (Navier-Stokes).

Démonstration dans le cas $\nu = 0$. — Continuité en $t = 0$.

On commence par revenir à l'estimation

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \frac{\|v^0\|_{H^m}}{1 - CT\|v^0\|_{H^m}},$$

qui, associée à l'inégalité $\|v(t)\|_{H^m} \leq \limsup_\varepsilon \|v_\varepsilon(t)\|_{H^m}$, donne :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \frac{\|v^0\|_{H^m}}{1 - CT\|v^0\|_{H^m}},$$

de sorte que, en faisant tendre $T \to 0^+$:

$$\limsup_{t\to 0^+} \|v(t,\cdot)\|_{H^m} \leq \|v^0\|_{H^m}.$$

D'autre part, comme $v \in \mathscr{C}([0,T]; H^m_w(\mathbb{R}^d))$ on a l'inégalité

$$\liminf_{t\to 0^+} \|v(t,\cdot)\|_{H^m} \geq \|v^0\|_{H^m},$$

et donc

$$\lim_{t\to 0^+} \|v(t,\cdot)\|_{H^m} = \|v^0\|_{H^m}.$$

On faisant le même raisonnement en remplaçant t en $-t$, les équations d'Euler étant réversibles, on obtient de la même manière $\lim_{t\to 0^-} \|v(t,\cdot)\|_{H^m} = \|v^0\|_{H^m}$.

— Continuité à $t = t_1 > 0$. À t_1, la fonction $v(t_1,\cdot) := v^1$ satisfait l'estimation

$$\|v^1\|_{H^m} \leq \frac{\|v^0\|_{H^m}}{1 - Ct_1\|v^0\|_{H^m}},$$

donc regarder le problème de Cauchy autour de $t = t_1$. On construit une suite de solutions approchées $\tilde{v}_\varepsilon$ pour laquelle on contrôle (unif. en ε) la norme H^m_x sur un petit intervalle de temps $[t_1 - \tilde{T}, t_1 + \tilde{T}]$. Par unicité de la solution du problème $(\mathscr{P}_\varepsilon)$, la limite quand $\varepsilon \to 0$, $\tilde{v}$ doit coïncider avec v sur $[t_1 - \tilde{T}, t_1 + \tilde{T}] \cap [0,T]$. On reproduit alors les arguments du point précédent pour montrer que $t \mapsto \|\tilde{v}\|_{H^m}$ est continue en $t = t_1$, et donc $v \in \mathscr{C}([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d))$.

— Enfin, pour obtenir la régularité $\mathscr{C}^1\big([0,T]; H^{m-1}(\mathbb{R}^d)\big)$, on revient à l'équation satisfaite par v :

$$\partial_t v = -\mathbb{P}\mathrm{div}\Big(v \otimes v\Big),$$

La régularité $v \in \mathscr{C}([0,T]; H^m(\mathbb{R}^d))$ assure que le second membre est dans $\mathscr{C}([0,T]; H^{m-1}(\mathbb{R}^d))$, et ainsi $\partial_t v \in \mathscr{C}([0,T]; H^{m-1}(\mathbb{R}^d))$.

□

Démonstration dans le cas $\nu > 0$. De la même manière que pour le cas des équations d'Euler ($\nu = 0$), on assure la continuité à forte de $t \mapsto \|v(t,\cdot)\|_{H^m}$ en $t = 0^+$. Les équations de Navier-Stokes n'étant pas réversible en temps du fait de la viscosité $\nu > 0$, nous ne pouvons pas montrer de manière analogue à continuité en $t = 0^-$. Nous procédons autrement ici en utilisant les effets régularisant justement liés à la dissipation visqueuse. En effet, en revenant à l'estimation (2.25), on a

$$\sqrt{\nu}\|J_\varepsilon \nabla v_\varepsilon\|_{L^2_t L^2_x} \leq C,$$

pour une constante $C>0$ indépendante de $\varepsilon>0$. Ainsi, la limite satisfait

$$v\in L^2((0,T);H^{m+1}(\mathbb{R}^d)). \tag{2.28}$$

et pour presque tout temps $t\in[0,T]$, $v(t,\cdot)\in H^{m+1}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, pour tout $\delta>0$, il existe $t_1\in]0,\delta[$ tel que $v(t_1,\cdot)\in H^{m+1}(\mathbb{R}^d)$ et prenons alors $v^1:=v(t_1,\cdot)$ comme nouvelle condition initiale. En appliquant les mêmes arguments que précédemment (en remplaçant m par $m+1$), on construit une solution $\hat{v}$ sur un intervalle de temps $[t_1,\hat{T}]$ qui satisfait $\hat{v}\in\mathscr{C}([t_1,\hat{T}];H^m(\mathbb{R}^d))$ avec $T<\hat{T}<(C\|v^0\|_{H^m})^{-1}$. Par unicité de la solution, $\hat{v}$ coïncide avec v sur $[0,T]\cap[t_1,\hat{T}]$. Comme de plus $\delta>0$ est choisi arbitrairement, on en déduit que $v\in\mathscr{C}(]0,T];H^m(\mathbb{R}^d))$. On conclut en rappelant la continuité à forte de $t\mapsto\|v(t,\cdot)\|_{H^m}$ en $t=0^+$. □

Ceci achève la preuve du Théorème 2.1.

2.6 Existence globale - Critère de Beale-Kato-Majda

Nous avons construit dans les sections précédentes une solution forte locale en temps des équations de Navier-Stokes et d'Euler. Nous nous intéressons dans cette section à l'existence globale en temps, qui revient nous l'avons vu, à assurer que $t\mapsto\|v(t,\cdot)\|_{H^m}$ reste bornée. Nous montrons ici que l'existence globale de la solution est liée à l'accumulation de vorticité. Nous en déduisons l'existence globale des solutions fortes en dimension 2 d'espace.

Théorème 2.24 (Beale-Kato-Majda, 1984)**.** *On suppose que $d=3$. Soient $\nu\geq 0$, $v^0\in V^m$ avec $m>\frac{d}{2}+2$, et v la solution de* (2.1)-(2.2)*. Alors on a l'équivalence suivante*

$$\limsup_{t\to T^-}\|v(t,\cdot)\|_{H^m}<+\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \int_0^T\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}dt<+\infty, \tag{2.29}$$

où $\omega=\operatorname{curl} v$.

Ce résultat s'appuie sur les estimations suivantes (admises dans ce cours) qui permettent d'obtenir des estimation sur $v=BS[\omega]$ (voir notations Chapitre 1).

Lemme 2.25 (Caldéron-Zygmund)**.** *Soit $p\in\,]1,+\infty[$ et $\omega\in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\|\nabla BS[\omega]\|_{L^p}\leq C(p)\|\omega\|_{L^p}. \tag{2.30}$$

Voir [Chemin *Fluides Parfaits Incompressibles*, Chap. 3].

Le lemme suivant donne une estimation dans le cas $p=+\infty$.

Lemme 2.26. *On suppose que $v=BS[\omega]$ est une fonction très régulière, on a alors l'estimation suivante*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty}\leq C\big(1+\ln^+\|v\|_{H^3}+\ln^+\|\omega\|_{L^2}\big)(1+\|\omega\|_{L^\infty}), \tag{2.31}$$

où C est une constante positive, et $\ln^+$ est la partie positive du logarithme, i.e. $\ln^+x=\ln x$ si $x\geq 1$ et 0 sinon.

Ce lemme est admis ici, on pourra trouver une démonstration dans [BertozziMajda, Chap.3, p.118].

Démonstration du Théorème 2.24. Le sens direct se démontre facilement grâce à l'estimation (2.3) : le contrôle de la norme H^m_x, permet de contrôler la norme L^∞_x de ∇v et donc la norme L^∞_x de ω.

On souhaite démontrer l'autre sens, i.e. on veut montrer que le contrôle de $\|\omega\|_{L^1 L^\infty}$ permet de contrôler $\|v\|_{L^\infty H^m}$. En reproduisant l'estimation (2.24) en norme H^m des sections précédentes pour v (justifié car on a montré que v était suffisamment régulière), on a

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{H^m} \leq C\|\nabla v\|_{L^\infty}\|v\|_{H^m}. \tag{2.32}$$

Pour $d = 3$, la formulation vorticité-courant des équations s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (v\cdot\nabla)\omega - \nu\Delta\omega = (\omega\cdot\nabla)v, \\ \omega_{|t=0} = \omega^0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Ainsi, en prenant le produit scalaire avec ω on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\omega|^2}{2}dx + \nu\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\omega|^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}^3} v\cdot\nabla\frac{|\omega|^2}{2}dx + \int_{\mathbb{R}^3}\big((\omega\cdot\nabla)v\big)\cdot\omega\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\big((\omega\cdot\nabla)v\big)\cdot\omega\, dx, \end{aligned}$$

et donc en utilisant le lemme 2.25

$$\frac{d}{dt}\|\omega\|^2_{L^2_x} \leq 2\|\nabla v\|_{L^2_x}\|\omega\|_{L^2_x}\|\omega\|_{L^\infty_x} \leq C\|\omega\|^2_{L^2_x}\|\omega\|_{L^\infty_x}.$$

Le lemme de Gronwall assure alors l'inégalité

$$\|\omega(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\omega^0\|^2_{L^2}\exp\left(\int_0^t \|\omega(s,\cdot)\|_{L^\infty}ds\right) \leq F(M), \tag{2.34}$$

où $M := \displaystyle\int_0^T \|\omega(s,\cdot)\|_{L^\infty}ds$. Comme $m > \frac{d}{2}+2 > 3$, en injectant cette estimation dans notre estimation de potentiel (2.31), on assure

$$\|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq C\big(1+\|\ln^+(v(t,\cdot))\|_{H^m}\big)\big(1+\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\big),$$

avec une constante C qui a absorbé la constante $F(M)$. En revenant à l'estimation (2.32), on a

$$\frac{d}{dt}\big(\|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1\big) \leq C\big(\|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1\big)\|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^\infty},$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\big(\|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1\big) \leq C\big(\|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1\big)\big(1+\underbrace{\|\ln^+(v(t,\cdot))\|_{H^3}}_{\leq \ln\left(\|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1\right)}\big)\big(\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}+1\big).$$

On pose alors $z(t) := \|v(t,\cdot)\|_{H^m}+1$, l'inégalité précédente se réécrit

$$z'(t) \leq Cz(t)(1+\ln z(t))\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty} \quad\Longrightarrow\quad (\ln z)'(t) \leq C(1+\ln z(t))\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty},$$

c'est-à-dire

$$\big(\ln(1+\ln z)\big)'(t) \leq C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}.$$

On en déduit que

$$1+\ln z(t) \leq (1+\ln z(0)) \exp\left(C\int_0^t \|\omega(s,\cdot)\|_{L^\infty} ds\right).$$

Ainsi,

$$\int_0^T \|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty} dt < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{t\to T^-} z(t) < +\infty \quad \text{i.e.} \quad \limsup_{t\to T^-} \|v(t)\|_{H^m} < +\infty.$$

□

Existence globale dans le cas de la dimension 2 En dimension 2, l'équation de la vorticité est donnée par l'équation scalaire

$$\partial_t \omega + (v\cdot\nabla)\omega - \nu\Delta\omega = 0,$$

qui ne contient donc pas de terme d'élongation (/streching $\omega\nabla v$) présent les équations 3d (2.33).

— Dans le cas des équations d'Euler $\nu = 0$, ω est donc simplement transporté par le champ de vitesse v. On assure d'une part par des estimations d'énergie $\|\omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\omega^0\|_{L^2}$, et d'autre part via les caractéristiques

$$\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty} = \|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

— Dans le cas Navier-Stokes $\nu > 0$, on a de la même façon $\|\omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\omega^0\|_{L^2}$, tandis que la borne L^∞ est assurée par le principe du maximum

$$\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|\omega^0\|_{L^\infty}.$$

En reproduisant les arguments de la preuve précédente, on montre que pour $m > \frac{d}{2}+2 = 3$,

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{H^m} \leq C(1+\ln^+\|v\|_{H^m})\|v\|_{H^m}, \tag{2.35}$$

et en posant $z(t) = 1+\|v(t,\cdot)\|_{H^m}$

$$\ln\big(1+\ln z(T)\big) \leq \ln\big(1+\ln z(0)\big) + CT.$$

Ainsi, $\limsup_{t\to T^-}\|v(t,\cdot)\|_{H^m} \leq C_T < +\infty$, et donc la solution existe globalement en temps.

Remarques de conclusion sur le cas 3D La question de l'existence globale des solutions fortes pour les équations d'Euler et Navier-Stokes 3D est a priori toujours ouverte. Il s'agit d'un des problèmes du millénaire identifié par l'institut Clay, voir

`https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/`

et l'article de description de Fefferman. On peut néanmoins citer des travaux récents (encore à l'état de preprints) de Chen et Hou qui semblent montrer, au moyen d'une preuve assistée par ordinateur, l'apparition de singularité en temps fini pour les équations d'Euler 3D (on pourra par exemple consulter l'article de vulgarisation correspondant sur le site Quanta Magazine).

Chapitre 3

Solutions faibles

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les solutions fortes des équations de Navier-Stokes et d'Euler (3D) étaient a priori définies sur un intervalle de temps fini. Nous nous intéressons dans cette section à des classes de solutions à régularité plus faible où les équations ne seront définies qu'au sens des distributions, mais dans lesquelles les solutions sont définies globalement en temps. L'inconvénient étant qu'a priori l'unicité de ces solutions n'est plus garantie.

Nous présentons des classes de solutions faibles des équations de Navier-Stokes (solutions de Leray) et d'Euler (solutions de Yudovich) pour lesquelles l'unicité est assurée dans le cas de la dimension 2.

3.1 Solutions faibles à vorticité L^∞ pour les équations d'Euler 2D

On rappelle que dans le cas 2D, pourvu que v décroisse suffisamment vite vers 0 quand $|x| \to +\infty$, les équations d'Euler incompressible se ramène au système vorticité-courant suivant

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0, \\ \omega_{|t=0} = \omega^0 \end{cases} \tag{3.1}$$

avec la loi de Biot-Savart

$$v(t,x) := BS[\omega](t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(x-y)\omega(t,y)\,dy, \qquad K_2(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2}(-x_2, x_1). \tag{3.2}$$

Nous introduisons maintenant la notion de solution faible (introduite par Yudovich) pour la formulation vorticité-courant.

Definition 3.1. *Soit $\omega^0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. On dit que $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ est une solution faible de* (3.1)-(3.2) *si, pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$:*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \Big[\omega\, \partial_t \phi + \omega\, BS[\omega] \cdot \nabla \phi\Big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0(x)\, \phi(0,x)\, dx = 0 \tag{3.3}$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Yudovich (1963))**.** *Soit $\omega^0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution faible au système* (3.1)-(3.2).

3.1.1 Existence

Problème approché Notre problème approché se base sur un schéma d'Euler (explicite) couplé à une régularisation de la donnée initiale.
Soit $\varepsilon > 0$, on pose initialement

$$\omega_{\varepsilon,n}(0,x) = J_\varepsilon \omega^0. \tag{3.4}$$

On construit alors la solution approchée $\omega_{\varepsilon,n}$ sur les intervalles de temps successifs $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ pour $k \in \mathbb{N}$. Supposons la solution $\omega_{\varepsilon,n}$ construite jusqu'au temps $t^n = \frac{k}{n}$, et posons $\bar{\omega}_{\varepsilon,n}(x) := \omega_{\varepsilon,n}(\frac{k}{n}, x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. On définit alors $\omega_{\varepsilon,n}$ sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ comme la solution de l'équation de transport linéaire

$$\begin{cases} \partial_t \omega_{\varepsilon,n} + BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}] \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,n} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \ \frac{k}{n} < t \leq \frac{k+1}{n}, \\ \omega_{\varepsilon,n}(\frac{k}{n}, x) = \bar{\omega}_{\varepsilon,n}(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

C'est donc directement la méthode des caractéristiques qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution $\omega_{\varepsilon,n}$ globale en temps. Sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$\omega_{\varepsilon,n}(t,x) = \bar{\omega}_{\varepsilon,n}\left((X_{\varepsilon,n})^{-1}\big(t - \frac{k}{n}, x\big)\right), \tag{3.6}$$

où la caractéristique $X_{\varepsilon,n}$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X_{\varepsilon,n}(t,a) = BS\big[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}(X_{\varepsilon,n}(t,a))\big], \\ X_{\varepsilon,n}(0,a) = a. \end{cases}$$

Par récurrence sur l'indice k, on montre que $\omega_{\varepsilon,n}$ est dans $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2))$ pour $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixés.

Estimations uniformes La construction de notre solution approchée nous assure directement les estimations uniformes suivantes

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\omega_{\varepsilon,n}(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \|\omega_\varepsilon^0\|_{L^p} \leq C\|\omega^0\|_{L^p}, \qquad \forall\ p \in [1, +\infty]. \tag{3.7}$$

Dans la suite nous admettons le résultat de Caldéron-Zygmund énoncé au Chap 2.

Lemme 3.3 (Caldéron-Zygmund)**.** *Soit $p \in\,]1, +\infty[$ et $\omega \in L^p(\mathbb{R}^2)$, alors*

$$\|\nabla BS[\omega]\|_{L^p} \leq C(p)\|\omega\|_{L^p}. \tag{3.8}$$

Ainsi, grâce à l'inégalité de Sobolev,

$$\|BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}} \leq C\left\|\nabla BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^p} \leq C(p)\|\omega(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C(p)\|\omega^0\|_{L^p} \qquad \forall\ p \in\,]1,2[,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left\|BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\right\|_{W^{1,q}} &= \left\|BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^q} + \left\|\nabla BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^q} \\ &\leq C(q)\|\omega\|_{L^q} + \left\|\nabla BS\big(\omega_{\varepsilon,n}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}} \\ &\leq C \qquad \text{pour tout} \quad q \in\,]2, +\infty[\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Enfin, on peut également obtenir une estimation de $\partial_t BS(\omega_{\varepsilon,n})$ de la façon suivante.

On applique l'opérateur $BS = \nabla^\perp \Delta^{-1} = K_2 * \cdot$ à l'équation pour obtenir

$$\partial_t BS[\omega_{\varepsilon,n}] = -BS\big[BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}] \cdot \nabla \omega_{\varepsilon,n}\big] = -BS\big[\mathrm{div}\big(BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}]\omega_{\varepsilon,n}\big)\big]. \tag{3.10}$$

On assure ainsi grâce à l'estimation de Caldéron-Zygmund

$$\begin{aligned}\|\partial_t BS[\omega_{\varepsilon,n}]\|_{L^\infty_t L^q_x} &\le C \left\|\nabla BS\big[BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}]\,\omega_{\varepsilon,n}\big]\right\|_{L^\infty_t L^q_x} \\ &\le C(q) \left\|BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}]\,\omega_{\varepsilon,n}\right\|_{L^\infty_t L^q_x} \\ &\le C(q) \|\omega_{\varepsilon,n}\|_{L^\infty_{t,x}} \|BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}]\|_{L^\infty_t L^q_x} \qquad \forall\, q \in]2,+\infty[\,.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Passage à la limite On considère des suites $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\varepsilon_j \to 0, \qquad n_j \to +\infty \qquad \text{quand} \quad j \to +\infty.$$

Grâce au contrôle en norme $L^\infty L^p$ de $\omega_{\varepsilon_j,n_j}$, le théorème de Banach-Alaoglu nous donne l'existence de $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^2))$ tel que (à extraction d'une sous-suite près)

$$\omega_{\varepsilon_j,n_j} \rightharpoonup \omega \quad \text{faible-* dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^2)), \quad \forall\, p \in]1,+\infty]\,. \tag{3.12}$$

L'opérateur BS étant un opérateur linéaire, et du fait de l'estimation (3.9), on en déduit que

$$BS[\omega_{\varepsilon_j,n_j}] \rightharpoonup BS[\omega] \quad \text{faible-* dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; W^{1,q}(\mathbb{R}^2)), \quad \forall\, q \in]2,+\infty[\,. \tag{3.13}$$

On utilise maintenant le contrôle de la dérivée en temps (3.11) pour conclure à la convergence forte de $BS[\omega_{\varepsilon_j,n_j}]$ grâce au lemme d'Aubin-Lions-Simon 2.20 (avec $B_0 = W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^2) \subset\subset B_1 = B_2 = L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)$) : pour tout $T > 0$

$$BS[\omega_{\varepsilon_j,n_j}] \to BS[\omega] \quad \text{dans} \quad \mathscr{C}([0,T]; L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad \forall\, q \in]2,+\infty[\,. \tag{3.14}$$

Enfin, avant de passer à la limite dans la formulation faible, on remarque que l'estimation (3.11) donne

$$\begin{aligned}\|BS[\omega_{\varepsilon,n}] - BS[\bar{\omega}_{\varepsilon,n}]\|_{L^\infty L^q} &\le \sup_{k=0,\dots,n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \|\partial_t BS[\omega_{\varepsilon,n}(t,\cdot)]\|_{L^q}\, dt \\ &\le \frac{C}{n},\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure à la convergence forte de $BS[\bar{\omega}_{\varepsilon_j,n_j}]$:

$$BS[\bar{\omega}_{\varepsilon_j,n_j}] \to BS[\omega] \quad \text{in} \quad \mathscr{C}([0,T]; L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)), \quad \forall\, q \in]2,+\infty[\,. \tag{3.15}$$

On peut alors passer à la limite dans la formulation faible, pour tout $\phi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2} \Big[\omega_{\varepsilon_j,n_j}\, \partial_t \phi + \omega_{\varepsilon_j,n_j} BS[\bar{\omega}_{\varepsilon_j,n_j}] \cdot \nabla\phi\Big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0_{\varepsilon_j}(x)\, \phi(0,x)\, dx = 0 \\ \Longrightarrow \quad &\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^2} \Big[\omega\, \partial_t \phi + \omega BS[\omega] \cdot \nabla\phi\Big]\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \omega^0(x)\, \phi(0,x)\, dx = 0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Il reste à montrer que la limite $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$, i.e. $\omega(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 3.4 (Variante du résultat de Dunford-Pettis)**.** *Soit (f_n) une suite bornée dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, uniformément intégrable c'est-à-dire*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mathbf{1}_{\{|f_n|>R\}}\,dx = 0 \qquad \textit{uniformément en } n,$$

Alors il existe une sous-suite, encore notée (f_n), et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tels que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n\,g\,dx \to \int_{\mathbb{R}^d} f\,g\,dx \qquad \textit{pour tout } g \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad g(x) \underset{|x|\to 0}{\to} 0.$$

Nous commençons par montrer que la suite $(\omega^0_{\varepsilon_j})_j$ est uniformément intégrable. On rappelle que $\omega^0_\varepsilon = J_\varepsilon\omega^0$ converge fortement vers ω^0 dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et donc, pour tout $\varepsilon \leq \bar\varepsilon$

$$\|\omega^0_\varepsilon\|_{L^1} \leq 2\|\omega^0\|_{L^1}.$$

Par ailleurs on peut montrer qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$|\omega^0_\varepsilon| \leq g,$$

et pour tout $\eta > 0$, il existe $\bar\varepsilon$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega^0_\varepsilon - \omega^0|dx \leq \eta \qquad \forall\ \varepsilon < \bar\varepsilon.$$

Ainsi, pour $R > 0$, et pour tout $\varepsilon_j < \bar\varepsilon$

$$\begin{aligned}\int_{|\omega^0_{\varepsilon_j}|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}|\,dx &\leq \int_{|g|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}|\,dx \\ &\leq \int_{|g|>R} |\omega^0|\,dx + \int_{|g|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j} - \omega^0|\,dx \\ &\leq |\{|g| > R\}|\|\omega^0\|_{L^\infty} + \eta.\end{aligned}$$

On observe maintenant qu'il existe R_η tel que pour tout $R > R_\eta$,

$$|\{|g| > R\}|\|\omega^0\|_{L^\infty} < \eta \qquad \text{et donc} \qquad \int_{|\omega^0_{\varepsilon_j}|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}|\,dx < 2\eta.$$

D'autre part, pour $\varepsilon_j \geq \bar\varepsilon$ fixé, il existe R'_η tel que

$$\int_{|\omega^0_{\varepsilon_j}|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}|\,dx \leq 2\eta \qquad \forall R > R'_\eta.$$

Ainsi, pour tout $R > \max(R_\eta, R'_\eta)$ on a

$$\int_{|\omega^0_{\varepsilon_j}|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}|\,dx \leq 2\eta \qquad \forall\ \varepsilon_j.$$

La suite $(\omega^0_{\varepsilon_j})_j$ est donc uniformément intégrable, ce qui permet de conclure à l'uniforme intégrabilité de la suite $(\omega_{\varepsilon_j,n_j})_j$. En effet, par la méthode des caractéristiques, on a sur l'intervalle de temps $]k/n, (k+1)/n]$

$$\omega_{\varepsilon_j,n_j}(t,x) = \bar\omega_{\varepsilon_j,n_j}(a),$$

où a est la pied de la caractéristique au temps k/n et donc par changement de variable sous l'intégrale (la divergence du champs de vitesse étant nulle)

$$\int_{|\omega_{\varepsilon_j,n_j}|>R} |\omega_{\varepsilon_j,n_j}(t,x)|dx = \int_{|\bar{\omega}_{\varepsilon_j,n_j}|>R} |\bar{\omega}_{\varepsilon_j,n_j}(a)|\; da.$$

Par récurrence sur k :

$$\int_{|\omega_{\varepsilon_j,n_j}|>R} |\omega_{\varepsilon_j,n_j}(t,x)|dx = \int_{|\omega^0_{\varepsilon_j}|>R} |\omega^0_{\varepsilon_j}(a)|\; da.$$

Ceci achève la preuve de l'existence d'une solution faible $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$.

3.1.2 Unicité

Preuve de l'unicité

Soient $\omega_1, \omega_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ deux solutions faibles émanant de la même donnée initiale ω^0. On définit $v_i = BS[\omega_i]$ les vitesses associées. Nous allons montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\|(v_1 - v_2)(t,\cdot)\|_{L^2} = 0$.

On a l'équation

$$\partial_t v_i + (v_i \cdot \nabla) v_i + \nabla p_i = 0, \qquad \operatorname{div} v_i = 0$$

satisfaite au sens des distributions. Par le théorème de Caldéron-Zygmund, on a $\nabla v(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$. Par injection de Sobolev on en déduit pour $p \in]1,2[$ que :

$$\|v(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2p}{2-p}}} \leq C\|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C, \tag{3.17}$$

de sorte que $v(t,\cdot) \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $q \in]2, +\infty[$ et

$$\|\partial_t v_i(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\mathbb{P}(v_i \cdot \nabla v_i)(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|(v_i \cdot \nabla v_i)(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|v_i(t,\cdot)\|_{L^4}\|\nabla v_i(t,\cdot)\|_{L^4} \leq C.$$

On en déduit que $\delta v := v_1 - v_2 \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2))$.
Pour presque tout t on a alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\delta v(t,\cdot)\|^2_{L^2} &= -2\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\big[(\delta v \cdot \nabla) v_1 + (v_2 \cdot \nabla)\delta v\big] \cdot \delta v dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^2} \big[(\delta v \cdot \nabla) v_1 + (v_2 \cdot \nabla)\delta v\big] \cdot \mathbb{P}\delta v dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^2} \big[(\delta v \cdot \nabla) v_1 + (v_2 \cdot \nabla)\delta v\big] \cdot \delta v dx,\end{aligned}$$

car $\operatorname{div}\delta v = 0$. En utilisant de nouveau l'égalité $\operatorname{div} v_2 = 0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\delta v(t,\cdot)\|^2_{L^2} &= -2\int_{\mathbb{R}^2} \big[(\delta v \cdot \nabla) v_1 \cdot \delta v + \frac{1}{2} v_2 \cdot \nabla|\delta v|^2\big] dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^2} (\delta v \cdot \nabla) v_1 \cdot \delta v\; dx.\end{aligned}$$

Nous en déduisons par une inégalité de Hölder et l'estimation de Caldéron-Zygmund (avec on le rappelle une constante $C(p) = O(p)$ quand $p \to +\infty$) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &\leq 2\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^q}\|\nabla v_1(t,\cdot)\|_{L^p}\\ &\leq Cp\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^q}\underbrace{\|v_1(t,\cdot)\|_{L^p}}_{\leq C \text{ par } (3.17)}\end{aligned}$$

avec $p > 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. On rappelle maintenant l'inégalité d'interpolation entre les espaces de Lebesgue :

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^2}^{\alpha}\|f\|_{L^4}^{1-\alpha} \qquad \text{avec} \quad \alpha \in]0,1[\quad \text{tel que} \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{4},$$

c'est-à-dire $\alpha = 1 - \frac{4}{p}$. En majorant $\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^4} \leq \|v_1(t,\cdot)\|_{L^4} + \|v_2(t,\cdot)\|_{L^4} \leq C$, nous obtenons alors

$$\frac{d}{dt}\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq Cp\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^{1+\alpha} = Cp\left(\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} = Cp\left(\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Ainsi, comme $\delta v(0,\cdot) = 0$,

$$\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq (2Ct)^{\frac{p}{2}}.$$

Pourvu que $t < T_1 = (2C)^{-1}$, en faisant tendre $p \to +\infty$, on en déduit que

$$\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = 0,$$

et donc l'unicité sur le petit intervalle de temps $[0, T_1]$. On peut répéter l'argument sur l'intervalle de temps $[T_1, 2T_1]$ et ainsi de suite. D'où l'unicité globale.

Vitesse et caractéristiques

Proposition 3.5. *Soit $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ la solution de la formulation vorticité-courant. Alors la vitesse $v = BS[\omega]$ est bornée et log-lipschitzienne, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$*

$$|x-y| \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad |v(t,x) - v(t,y)| \leq C|x-y|\left|\log|x-y|\right|,$$

où C est une constante positive qui ne dépend que de $\|\omega^0\|_{L^1}$ et $\|\omega^0\|_{L^\infty}$.
De plus les caractéristiques sont globales en temps et uniques.

Nous prouvons cette proposition dans la sous-section suivante, nous avons besoin au préalable de donner des généralisations du lemme de Gronwall et du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Lemme d'Osgood et problème de Cauchy

Lemme 3.6 (Lemme d'Osgood)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue positive et vérifiant l'inégalité*

$$f(t) \leq A + \int_0^t \theta(f(s))\,ds,$$

où $A > 0$, θ est une fonction croissante, positive tendant vers 0 en 0 et satisfaisant l'hypothèse

$$\int_0^1 \frac{1}{\theta(z)}\,dz = +\infty.$$

Alors

$$\Theta(f(t)) \leq \Theta(A) + t, \qquad \forall\ t \geq 0, \tag{3.18}$$

où

$$\Theta(z) = \int_1^z \frac{1}{\theta(u)} du, \quad \Theta(0) = -\infty.$$

Démonstration. On introduit la fonction $h \in \mathscr{C}^1$, à valeurs strictement positives

$$h(t) := A + \int_0^t \theta(f(s))\, ds,$$

qui satisfait donc

$$h'(t) = \theta(f(t)) \qquad \overset{\theta \nearrow,\, f \leq h}{\Longrightarrow} \qquad h'(t) \leq \theta(h(t)).$$

On a à présent

$$\frac{d}{dt}\Theta(h(t)) = \Theta'(h(t)).h'(t) = \frac{h'(t)}{\theta(h(t))} \leq 1,$$

et ainsi par intégration entre 0 et t :

$$\Theta(h(t)) \leq \Theta(A) + t.$$

θ étant une fonction à valeurs positives, Θ est une fonction croissante et on conclut à l'inégalité voulue :

$$\Theta(f(t)) \leq \Theta(A) + t, \qquad \forall\ t \geq 0.$$

□

Corollaire 3.7. *Sous les hypothèses du lemme précédent, en supposant cette fois que $A = 0$, alors f est nulle sur $[0, +\infty[$.*

Démonstration. On prend $A = \eta > 0$ et on fait tendre η vers 0, on a alors $\Theta(\eta) + t \to -\infty$ pour tout $t \geq 0$. Nécessairement $f(t) = 0$ car sinon $\Theta(f(t))$ aurait une valeur finie. □

Proposition 3.8. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction telle que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq C\mu(|x-y|),$$

où μ est une fonction continue, positive, croissante. On suppose de plus que

$$\int_0^1 \frac{1}{\mu(z)} dz = +\infty.$$

Alors, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution globale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Démonstration. — existence assurée par la continuité de f via le théorème de Cauchy-Peano.

— pour montrer l'unicité locale, on considère deux solutions $y_{1,2}$ définies sur un intervalle commun J. On a pour tout $t \in J$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_0^t \left|f(y_1(s)) - f(y_2(s))\right| ds \leq \int_0^t \mu\big(|y_1(s) - y_2(s)|\big)\, ds.$$

Le lemme d'Osgood nous assure alors que $y_1 = y_2$ sur l'intervalle J car μ est bien une fonction positive, croissante satisfaisant la condition de dégénerescence en 0.

— caractère global en temps : comme f est uniformément continue, il existe δ_0 tel que $\mu(\delta_0) \leq 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, on introduit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N = \lfloor \frac{|x-y|}{\delta_0} \rfloor$. On a alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \sum_{k=0}^{N} \left| f\left(x + k\delta \frac{y-x}{|y-x|}\right) - f\left(x + (k+1)\delta \frac{y-x}{|y-x|}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \mu(\delta) \\
&\leq N + 1 \leq \frac{|x-y|}{\delta} + 1,
\end{aligned}$$

et donc pour $y = 0$

$$|f(x)| \leq \frac{|x|}{\delta} + 1 + |f(0)|,$$

ce qui signifie que f est sous-linéaire. On peut alors utiliser le lemme standard de Gronwall dans l'inégalité

$$|y'(t)| \leq \frac{|y(t)|}{\delta_0} + 1 + |f(0)|$$

pour conclure qu'il ne peut pas se produire d'explosion en temps fini.

□

Preuve de la Proposition 3.5. Pour montrer le résultat il nous faut obtenir l'existence et l'unicité d'une vitesse log-lipschitz, le résultat sur les caractéristiques découlant alors directement de la Proposition 3.8 appliquée à la fonction $\mu(z) = z|\ln z|$.

D'après la loi de Biot-Savart, on a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, avec $\delta := |x - y| < 1/2$:

$$\begin{aligned}
v(t,x) - v(t,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(K_2(x-z) - K_2(y-z)\big)\omega(t,z)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \big(K_2(x-z) - K_2(y-z)\big)\omega(t,z)\mathbf{1}_{\{|x-z|>2\}}\, dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \big(K_2(x-z) - K_2(y-z)\big)\omega(t,z)\mathbf{1}_{\{2\delta<|x-z|<2\}}\, dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \big(K_2(x-z) - K_2(y-z)\big)\omega(t,z)\mathbf{1}_{\{|x-z|<2\delta\}}\, dz \\
&=: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que

$$|K_2(x-z) - K_2(y-z)| = \frac{|x-y|}{2\pi|x-z||y-z|}.$$

Pour I_1, on intègre sur un domaine où la quantité ci-dessus est bien contrôlée car $|x-z|>2$, et d'après l'hypothèse sur δ : $|y-z|>3/2$. Ainsi

$$|I_1| \le \frac{1}{6\pi}|x-y|\|\omega(t,\cdot)\|_{L^1},$$

et comme on suppose $\delta := |x-y| < 1/2$, on peut majorer grossièrement par

$$|I_1| \le C(\|\omega(t,\cdot)\|_{L^1})\ |x-y|\,\big|\log|x-y|\big|.$$

Pour I_2, nous avons $\delta < |z-y| < 3/2$ et

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta \int_{2\delta<|x-z|<2} \frac{dz}{|x-z||y-z|}\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta \int_{2\delta<|x-z|<2} \frac{dz}{|x-z|\big(|x-z|-\delta\big)}\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta \int_{2\delta}^{2} \frac{2\pi dr}{r-\delta}\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta \left[\log(2-\delta)-\log\delta\right]\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta\,|\log\delta| = C\|\omega\|_{L^\infty}|x-y|\,\big|\log|x-y|\big|
\end{aligned}$$

Enfin pour I_3, on est dans la région où $|x-z|\le 2\delta$ et $|y-z|\le 3\delta$. On majore alors l'intégrande comme suit

$$|K_2(x-z)-K_2(y-z)| \le |K_2(x,y)|+|K_2(y,z)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x-z|}+\frac{1}{|y-z|}\right),$$

et

$$\begin{aligned}
|I_3| &\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\left(\int_{|x-z|\le 2\delta}\frac{1}{|x-z|}dz + \int_{|x-z|\le 2\delta}\frac{1}{|y-z|}dz\right)\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\left(\int_{|x-z|\le 2\delta}\frac{1}{|x-z|}dz + \int_{|y-z|\le 3\delta}\frac{1}{|y-z|}dz\right)\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\left(\int_0^{2\delta}2\pi dr + \int_0^{3\delta}2\pi dr\right)\\
&\le C\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\delta = C\|\omega\|_{L^\infty}|x-y|.
\end{aligned}$$

En combinant ces trois estimations, on obtient le résultat voulu :

$$|v(t,x)-v(t,y)| \le C\big(\|\omega(t,\cdot)\|_{L^1}+\|\omega(t,\cdot)\|_{L^\infty}\big)|x-y|\,\big|\log|x-y|\big|$$

□

3.2 Solutions de Leray pour les équations de Navier-Stokes

On rappelle les équations de Navier-Stokes définies pour une viscosité $\nu > 0$

$$\begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p - \nu\Delta v = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{cases} \qquad \forall\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ d=2 \text{ ou } 3, \tag{3.19}$$

muni de la condition initiale

$$v_{|t=0} = v^0. \tag{3.20}$$

3.2.1 Définition des solutions faibles de Leray et résultat principal

Definition 3.9 (Solutions faibles de Leray)**.** *On dit que v est une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes* (3.19)-(3.20) *si pour tout $T > 0$ les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *v satisfait la régularité suivante*
$$v \in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\dot H^1(\mathbb{R}^d)); \tag{3.21}$$
2. *la condition d'incompressibilité est satisfaite au sens des distributions*
$$\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\nabla\phi\, dx = 0, \qquad \forall\ \phi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}); \tag{3.22}$$
3. *l'équation de quantité de mouvement est satisfaite au sens des distributions : pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty([0,T[\times\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{div}\varphi = 0$*
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Big[v\cdot\partial_t\varphi - v\cdot(\nabla\varphi.v) - \nu v\cdot\Delta\varphi \Big]\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} v^0\cdot\varphi(0,\cdot)\, dx = 0; \tag{3.23}$$
4. *pour tout $t\in[0,T]$, l'inégalité d'énergie est satisfaite*
$$\|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2\, ds \le \|v^0\|_{L^2}^2. \tag{3.24}$$

Théorème 3.10 (Leray, 1934)**.** *Soit $v^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à divergence nulle. Alors*

— *il existe une solution faible de Leray aux équations de Navier-Stokes* (3.19)-(3.20) *;*

— *si $d = 2$, cette solution est unique.*

3.2.2 Existence d'une solution de Leray, $d = 2$ ou 3

Problème approché On suit l'approche originelle de Leray et on introduit le problème approché suivant

$$\begin{cases} \partial_t v_\varepsilon + (J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon - \nu\Delta v_\varepsilon = 0, \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0, \\ (v_\varepsilon)_{|t=0} = J_\varepsilon v^0, \end{cases} \tag{3.25}$$

où $(J_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille d'opérateurs régularisants comme introduit au chapitre précédent.

Comme précédemment, on applique le projecteur de Leray pour éliminer la pression

$$\begin{cases} \partial_t v_\varepsilon + \mathbb{P}(J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon - \nu\Delta v_\varepsilon = 0, \\ (v_\varepsilon)_{|t=0} = J_\varepsilon v^0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Proposition 3.11. *Soit $\varepsilon > 0$, il existe une unique solution v_ε du problème* (3.26).

Idée de la preuve. On montre qu'il existe un temps T_ε tel que l'application

$$v(t) \mapsto \mathscr{A}_\varepsilon(v)(t) := e^{\nu t\Delta} J_\varepsilon v^0 - \int_0^t e^{\nu(t-s)\Delta}\mathbb{P}\mathrm{div}\big(J_\varepsilon v(s) \otimes v(s)\big)ds,$$

admet un unique point fixe dans l'espace de Banach

$$X_{T_\varepsilon} := L^\infty\big(0, T_\varepsilon; \bar{B}_{V^0}(2\|v^0\|_{L^2})\big).$$

On prolonge ensuite la solution v_ε sur l'intervalle de temps $\mathbb{R}_+$ tout entier en utilisant le contrôle de l'énergie

$$\sup_{s\in[0,t]} \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla v_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2 = \|v_\varepsilon^0\|_{L^2}^2 \le C\|v^0\|_{L^2}^2. \tag{3.27}$$

□

Estimations uniformes

Proposition 3.12 (Bornes)**.** — *Pour tout $T > 0$, la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$;*

— *Pour tout $T > 0$, la suite $(\partial_t v_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^{\frac{4}{d}}(0,T;\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d))$.*

Démonstration. — Par l'estimation d'énergie (3.27) on a le contrôle uniforme de (v_ε) dans $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$.

— Pour estimer $\partial_t v_\varepsilon$ on utilise l'équation (3.26)

$$<\partial_t v_\varepsilon(t,\cdot),\varphi>_{H^{-1},H^1} = -\nu\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v_\varepsilon(t,\cdot):\nabla\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon v_\varepsilon(t,\cdot)\cdot(\nabla\mathbb{P}\varphi\,.\,v_\varepsilon(t,\cdot))\,dx.$$

pour obtenir

$$|<\partial_t v_\varepsilon(t,\cdot),\varphi>_{H^{-1},H^1}| \le \nu\|\nabla v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}\|\nabla\varphi\|_{L^2} + \|v_\varepsilon\|_{L^4}^2\|\nabla\varphi\|_{L^2}.$$

On rappelle l'inégalité de Ladyzhenskaya (2.5) (qui est un cas particulier de l'inégalité de Gagliardo-Niremberg)

$$\|v\|_{L^4} \le C\|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}}\|\nabla v\|_{L^2}^{\frac{d}{4}}. \tag{3.28}$$

Ainsi

$$\|\partial_t v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{H^{-1}} \le \nu\underbrace{\|\nabla v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}}_{\in L_t^2} + \underbrace{\|v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}}\|\nabla v_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}}_{\in L_t^{4/d}}.$$

□

Passage à la limite. D'après les estimations uniformes ci-dessus, et le lemme d'Aubin-Lions-Simon, on en déduit qu'il existe qu'il existe une sous-suite encore notée (v_ε) et une limite $v \in \mathscr{C}([0,T];L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T;\dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$ tels que

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &\rightharpoonup v && \text{faible-* dans } L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)), && (3.29)\\ \nabla v_\varepsilon &\rightharpoonup \nabla v && \text{faiblement dans } L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d), && (3.30)\\ v_\varepsilon &\longrightarrow v && \text{fortement dans } L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d). && (3.31) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut appliquer le Lemme 2.23 aux espaces $X = L^2(K)$, $Y = H^{-1}(K)$ pour déduire que

$$v \in \mathscr{C}([0,T];L^2_{w,loc}(\mathbb{R}^d)). \tag{3.32}$$

On passe alors facilement à la limite dans la formulation faible. En effet, on a pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c([0,T[\times\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{div}\varphi = 0$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon\cdot\partial_t\varphi\, dxdt \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\partial_t\varphi\, dxdt,$$

$$\nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon\cdot\Delta\varphi\, dxdt \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} \nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot\Delta\varphi\, dxdt,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon v^0\cdot\varphi(0,\cdot)dx \underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} v^0\cdot\varphi(0,\cdot)dx,$$

puis, grâce à la convergence force de v_ε (et donc de $J_\varepsilon v_\varepsilon$) dans $L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot\nabla)v_\varepsilon\cdot\varphi\, dxdt = -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon v_\varepsilon\cdot(\nabla\varphi.v_\varepsilon)\, dxdt\\ &\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v\cdot(\nabla\varphi.v)\, dxdt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(v\cdot\nabla)v\cdot\varphi\, dxdt. \end{aligned}$$

En ce qui concerne l'inégalité d'énergie, on utilise la convergence faible (3.30) pour avoir (cf lemme semi-continuité inférieure de la norme)

$$\int_0^t \|\nabla v(s,\cdot)\|^2_{L^2}ds \le \liminf_\varepsilon \int_0^t \|\nabla v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}ds. \tag{3.33}$$

Pour le terme associé à l'énergie cinétique nous ne pouvons pas conclure directement car la convergence de v_ε a lieu dans $L^2_tL^2_x$ (et pas dans $\mathscr{C}([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$. On introduit donc une fonction test $\alpha = \alpha(t) \in \mathscr{C}([0,T[)$ de sorte que par les convergences faibles de $\alpha v_\varepsilon, \alpha\nabla v_\varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\alpha(t)|^2|v(t,x)|^2dxdt + 2\mu\int_0^T|\alpha(t)|^2\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla v(s,x)|^2dxds\right)dt\\ &\le \liminf_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\alpha(t)|^2|v_\varepsilon(t,x)|^2dxdt + 2\mu\int_0^T|\alpha(t)|^2\left(\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla v_\varepsilon(s,x)|^2dxds\right)dt\right]\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\alpha(t)|^2|J_\varepsilon v^0|^2\, dxdt \le \|v^0\|^2_{L^2}\int_0^T|\alpha(t)|^2dt. \end{aligned}$$

Soient $t_0 \in]0,T[$, $\eta > 0$ fixés, $\theta \in \mathscr{C}^\infty_c([0,T[)$ telle que $\int_0^T|\theta(t)|^2dt = 1$. On pose

$$\alpha(t) := \frac{1}{\eta^{1/2}}\theta\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right).$$

Soit f une fonction intégrable sur $]0,T[$, on rappelle que $t_0 \in]0,T[$ est un point de Lebesgue de f si

$$\sup_{\omega \in \mathcal{V}_\eta(t_0)} \frac{1}{|\omega|} \int_\omega |f(t) - f(t_0)| dt \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

où $\mathcal{V}_\eta(t_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de t_0 de mesure plus petite que η.
Avec cette fonction test α et en faisant tendre $\eta \to 0^+$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\limsup_{\eta \to 0^+} \int_0^T \frac{1}{\eta} \theta^2 \left(\frac{t - t_0}{\eta} \right) \|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 dt + 2\mu \int_0^{t_0} \|\nabla v(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \le \|v^0\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, pour t_0 un point de Lebesgue de la fonction $t \mapsto \|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ on a

$$\|v(t_0,\cdot)\|_{L^2}^2 dt + 2\mu \int_0^{t_0} \|\nabla v(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \le \|v^0\|_{L^2}^2.$$

On étend le résultat à tout point $t_0 \in [0,T]$ en choisissant une suite t_n de points de Lebesgue de $t \mapsto \|v(t,\cdot)\|_{L^2}^2$ qui converge vers t_0 (l'ensemble des points de Lebesgue d'une fonction intégrable sur $]0,T[$, est dense dans $[0,T]$), ainsi

$$\|v(t_0,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^{t_0} \|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \le \liminf_n \left[\|v(t_n,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^{t_n} \|\nabla v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \right] \le \|v^0\|_{L^2}^2. \tag{3.34}$$

On vérifie enfin que la donnée initiale est atteinte dans L_x^2. En effet comme $v \in \mathscr{C}([0,T]; L_{w,loc}^2(\mathbb{R}^d))$ on a d'une part $\|v^0\|_{L^2} \le \liminf_{t \to 0^+} \|v(t,\cdot)\|_{L^2}$. D'autre part, l'inégalité d'énergie précédemment démontrée nous donne $\limsup_{t \to 0^+} \|v(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|v^0\|_{L^2}$. Ainsi on a la convergence en norme $\|v(t,\cdot)\|_{L^2} \to \|v^0\|_{L^2}$ et par la continuité faible en temps on conclut que $\|v(t,\cdot) - v^0\|_{L^2} \to 0$ quand $t \to 0^+$.

Commentaires D'autres constructions sont possibles, notamment dans le cas d'un domaine borné
- approximation de Faedo-Galerkin
- approximation schéma d'Euler

3.2.3 Unicité de la solution de Leray pour $d = 2$ - Ladyzhenskaya

Soient v^1, v^2 deux solutions de Leray émanant de la même donnée initiale v^0. On note $\delta v := v^1 - v^2$. On a

$$\partial_t \delta v - \nu \Delta \delta v + (v^1 \cdot \nabla) \delta v + (\delta v \cdot \nabla) v^2 + \nabla(p^1 - p^2) = 0, \qquad \text{avec} \quad (\delta v)_{t=0} = 0.$$

On a $\delta v \in L^2(0,T; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$ avec $\operatorname{div} \delta v = 0$, ainsi en prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec δv on a pour presque tout t

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &\le \|\nabla \delta v(t,\cdot)\|_{L^2} \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^4} \|v^2(t,\cdot)\|_{L^4} \\ &\le \|\nabla \delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^{3/2} \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^{1/2} \|v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^{1/2}, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Ladyzhenskaya avec $d = 2$. Par une inégalité de Young on a alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \le \frac{\nu}{2} \|\nabla \delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + C_\nu \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \|v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \|\nabla v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

On absorbe le premier terme du membre de droite dans le membre de gauche,

$$\frac{1}{2}\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla\delta v(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \le C_\nu \|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \|v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \|\nabla v^2(t,\cdot)\|_{L^2}^2,$$

et on finit en utilisant l'inégalité de Gronwall et l'inégalité d'énergie satisfaite par v^2 :

$$\begin{aligned}
\|\delta v(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &\le \|\delta v(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \,\exp\left(C_\nu \int_0^t \|v^2(s,\cdot)\|_{L^2}^2 \|\nabla v^2(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds\right) \\
&\le \|\delta v(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \,\exp\left(C_\nu \,\|v^2\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \|\nabla v^2\|_{L_t^2 L_x^2}^2\right) \\
&\le \|\delta v(0,\cdot)\|_{L^2}^2 \,\exp\left(C_\nu \,\|v^0\|_{L^2}^4\right) = 0.
\end{aligned}$$

Commentaires dans le cas $d = 3$ non-unicité en présence d'une force extérieure résultat d'Albritton, Brué, Colombo 2022 on renvoie à un article de vulgarisation sur Quanta Magazine, et au séminaire Bourbaki d'A.-L. Dalibard (juin 2023).